

FIȘA DISCIPLINEI

1. Date despre program

1.1 Instituția de învățământ superior	Universitatea Transilvania din Brașov
1.2 Facultatea	Matematică și Informatică
1.3 Departamentul	Matematică și Informatică
1.4 Domeniul de studii de licență ⁽¹⁾	Matematică
1.5 Ciclul de studii ⁽²⁾	Licență
1.6 Programul de studii/ Calificarea	Matematică Informatică

2. Date despre disciplină

2.1 Denumirea disciplinei	Calcul variațional							
2.2 Titularul activităților de curs	Conf. Dr. Florin Isaia							
2.3 Titularul activităților de seminar	Conf. Dr. Florin Isaia							
2.4 Anul de studiu	II	2.5 Semestrul	2	2.6 Tipul de evaluare	E	2.7 Regimul disciplinei	Conținut ⁽³⁾	DS
							Obligativitate ⁽⁴⁾	DO

3. Timpul total estimat (ore pe semestru al activităților didactice)

3.1 Număr de ore pe săptămână	4	din care: 3.2 curs	2	3.3 seminar	2
3.4 Total ore din planul de învățământ	40	din care: 3.5 curs	20	3.6 seminar	20
Distribuția fondului de timp					ore
Studiul după manual, suport de curs, bibliografie și notițe					50
Documentare suplimentară în bibliotecă, pe platformele electronice de specialitate și pe teren					15
Pregătire seminare/ laboratoare/ proiecte, teme, referate, portofolii și eseuri					40
Tutoriat					2
Examinări					3
Alte activități.....					-
3.7 Total ore de activitate a studentului	110				
3.8 Total ore pe semestru	150				
3.9 Numărul de credite ⁽⁵⁾	5				

4. Precondiții (acolo unde este cazul)

4.1 de curriculum	Asimilarea cunoștințelor de bază din disciplinele: Analiză matematică (Calcul diferențial și Calcul integral), Analiză funcțională, Ecuații diferențiale, Ecuații cu derivate parțiale.
4.2 de competențe	- Înțelegerea riguroasă a termenilor, conceptelor, principiilor, aserțiunilor și proceselor din disciplinele de bază ale matematicii. - Operarea cu concepte, aserțiuni, metode și algoritmi din disciplinele de bază ale matematicii.

5. Condiții (acolo unde este cazul)

5.1 de desfășurare a cursului	Existența unei săli care să asigure minim 1 m²/student și care să fie dotată corespunzător pentru curs (video-proiector și două table de min. 2 m²)
5.2 de desfășurare a seminarului	Existența unei săli care să asigure minim 1 m²/student și care să fie dotată corespunzător pentru seminar (două table de min. 2 m²)

6. Competențe specifice acumulate și rezultate ale învățării

Competențe profesionale	CP3. Utilizarea noțiunilor de informatică și matematici aplicate în rezolvarea problemelor 3.1. Cunoștințe <i>R.Î.3.1.1. Studentul/absolventul definește conceptele din disciplinele de bază de informatică și/sau matematici aplicate.</i> <i>R.Î.3.1.2. Studentul/absolventul compară și distinge noțiunile înrudite și proprietățile acestora din disciplinele de bază de informatică și/sau matematici aplicate.</i> 3.2. Aptitudini <i>R.Î.3.2.1. Studentul/absolventul identifică și aplică tehnicile adecvate pentru rezolvarea exercițiilor și problemelor din disciplinele majore ale matematicii.</i> <i>R.Î.3.2.2. Studentul/absolventul identifică și aplică tehnicile adecvate pentru rezolvarea problemelor din disciplinele avansate de matematică.</i> 3.3. Responsabilitate și autonomie <i>R.Î.3.3.1. Studentul/absolventul identifică și corelează legături între concepte aparent fără legătură din disciplinele majore ale matematicii.</i> <i>R.Î.3.3.2. Studentul/absolventul rezumă, clasifică și prezintă concluziile unor probleme date folosind diverse tipuri de reprezentări și comunică clar și eficient concepte și raționamente matematice la specialiști și nespecialiști prin rapoarte scrise și prezentări orale.</i> CP4. Modelarea matematică a fenomenelor și rezolvarea numerică a problemelor 4.1. Cunoștințe <i>R.Î.4.1.1. Studentul/absolventul formulează observații și diferențiază noțiuni, proprietăți și aserțiuni din disciplinele de bază de informatică și/sau matematici aplicate prin exemple și contraexemple.</i> 4.2. Aptitudini <i>R.Î.4.2.1. Studentul/absolventul descrie probleme din lumea reală în termeni matematici, identifică ipotezele de lucru, construiește modele matematice adecvate și explică limitările modelelor astfel obținute.</i> 4.3. Responsabilitate și autonomie <i>R.Î.4.3.1. Studentul/absolventul rezolvă prin metode analitice și/sau numerice și folosește pachete software dedicate sau scrie coduri elaborate în vederea rezolvării unor probleme practice și a modelelor matematice construite folosind ecuațiile diferențiale și cu derivate parțiale sau a altor instrumente din curricula parcursă.</i>
-------------------------	---

Competențe transversale	CT1. Gândirea analitică, organizarea de informații și resurse, interpretarea de date și soluționarea problemelor Rezultate ale învățării <i>RÎ 1.1: Absolventul gândește folosind logica și raționamentul pentru a identifica punctele tari și punctele slabe ale soluțiilor alternative, concluziilor sau abordărilor problemelor.</i> <i>RÎ 1.2: Absolventul înțelege sarcinile care îi revin și procesele aferente, organizează informații, obiecte și resurse prin metode sistematice și în conformitate cu anumite standarde și asigură gestionarea sarcinii.</i> <i>RÎ 1.3: Absolventul dă dovadă de înțelegere a termenilor și conceptelor matematice și aplică principii și procese matematice de bază pentru interpretarea datelor și a faptelor.</i> <i>RÎ 1.4: Absolventul găsește soluții la probleme practice, operaționale sau conceptuale într-o gamă largă de contexte.</i> CT3. Lucrul în echipă, învățarea continuă și dezvoltarea relațiilor de colaborare Rezultate ale învățării <i>RÎ 3.1: Absolventul lucrează cu încredere în cadrul unui grup, contribuind activ la realizarea sarcinilor comune.</i> <i>RÎ 3.2: Absolventul dă dovadă de o atitudine pozitivă față de cerințe noi și provocatoare, manifestând dorința de învățare pe tot parcursul vieții.</i> <i>RÎ 3.3: Absolventul construiește relații de încredere reciprocă, respect și cooperare între membrii unei echipe.</i>

7. Obiectivele disciplinei (reieșind din competențele specifice acumulate)

7.1 Obiectivul general al disciplinei	Calculul variațional este un instrument puternic în studiul fenomenelor neliniare ce apar în fizică și în alte științe cu caracter aplicativ. Obiectivul general al acestei discipline este să prezinte studenților o mică parte din metodele și modelele matematice folosite pentru rezolvarea unor probleme de extrem asociate unor funcționale de tip integral definite pe diferite tipuri de varietăți.
7.2 Obiectivele specifice	Cunoștințe • Extremele funcționalelor diferențiabile, condiții necesare și condiții suficiente de extrem local. • Probleme variaționale cu capete fixe. Ecuația Euler-Lagrange și generalizări. Aplicații. Condițiile lui Legendre și Weierstrass. • Probleme izoperimetrice. Aplicații. • Problema lui Lagrange. Aplicații. • Probleme variaționale cu capete mobile. Aplicații. • Metode directe în calculul variațional. Aptitudini • Aflarea extremalelor unor funcționale de tip integral prin rezolvarea ecuației Euler-Lagrange sau a unor integrale prime sau a sistemul Euler-Lagrange sau a ecuației Euler-Poisson sau a ecuației Euler-Ostrogradski. Verificarea minimului sau maximului. • Rezolvarea de probleme izoperimetrice. • Calculul distanței dintre două puncte pe o suprafață dată. • Calculul distanței dintre un punct și o curbă. Calculul distanței dintre două curbe. • Folosirea unor metode directe pentru aflarea unor soluții aproximative ale unor probleme variaționale date Responsabilitate și autonomie • Rezolvarea în mod autonom a unor probleme de extrem pentru anumite

	funcționale de tip integral. • Integrarea cunoștințelor de calcul variațional în abordarea interdisciplinară a problemelor, în special în contexte ce implică legătura dintre matematică, fizică și aplicații ingineresti. • Dezvoltarea capacității de autoevaluare și perfecționare continuă în învățarea tehnicilor analitice aplicabile în cercetarea fundamentală sau aplicativă.
--	--

8. Conținuturi

8.1 Curs	Metode de predare	Număr de ore	Observații
1. Elemente de Analiză matematică și Analiză funcțională -Spații metrice. Spații normate. Funcționale. -Funcționale continue. Funcționale liniare. Funcționale pătratice. -Funcționale diferențiabile Frechet. Funcționale diferențiabile Gateaux. Variațiile de ordinele 1 și 2. -Funcționale de tip integral.	Prelegere clasică, conversație, demonstrație didactică	4	
2. Extremele funcționalelor diferențiabile -Condiții necesare de extrem local pentru funcționale diferențiabile. -Condiții necesare și condiții suficiente de extrem local pentru funcționale de două ori diferențiabile.	Prelegere clasică, conversație, demonstrație didactică	2	
3. Probleme variaționale cu capete fixe. Ecuația Euler-Lagrange și generalizări. Aplicații -Ecuația Euler-Lagrange. Integrale prime. -Problema brahistocronei. Problema suprafeței de rotație de arie minimă. -Condiția necesară a lui Legendre. Condițiile suficiente ale lui Weierstrass. -Sistemul Euler-Lagrange. -Ecuația Euler-Poisson. -Ecuația Euler-Ostrogradski. Principiul variațional al lui Dirichlet.	Prelegere clasică, conversație, demonstrație didactică	4	
4. Probleme izoperimetrice. Aplicații -Existența multiplicatorului lui Lagrange. -Problema Didonei. Poziția de echilibru a unui fir omogen greu în câmp gravitațional uniform. - Legătura cu problema Sturm-Liouville.	Prelegere clasică, conversație, demonstrație didactică	2	

5. Problema lui Lagrange. Aplicații -Existența multiplicatorului lui Lagrange. -Geodezicele suprafeței sferice. Geodezicele suprafeței cilindrice.	Prelegere clasică, conversație, demonstrație didactică	2	
6. Probleme variaționale cu capete mobile. Aplicații -Capete situate pe drepte verticale în plan. -Capete situate pe curbe plane arbitrare. -Distanța între două curbe plane.	Prelegere clasică, conversație, demonstrație didactică	2	
7. Metode directe în calculul variațional -Metoda diferențelor finite a lui Euler. -Metoda lui Ritz. -Metode variaționale pentru problema Sturm-Liouville.	Prelegere clasică, conversație, demonstrație didactică	4	
Bibliografie 1. I.M. Gelfand, S.V. Fomin – Calculus of variations. Revised english edition, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1963. 2. A. Haimovici – Ecuațiile fizicii matematice și elemente de calcul variațional, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1966. 3. F. Isaia – Calcul variațional, Note de curs. 4. H. Kielhofer – Calculus of variations, Springer, Rimsting, 2018. 5. M.L. Krasnov, G.I. Makarenko, A.I. Kiselev – Problems and exercises in the Calculus of variations, Mir Publishers, Moscow, 1975. 6. G.E. Șilov – Analiză Matematică. Curs special (Ediția a doua), Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1989. 7. V.I. Smirnov – Curs de matematici superioare. Vol. IV, Editura Tehnică, București, 1956. 8. N. Teodorescu, V. Olariu – Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale, Editura Tehnică, București, 1980. 9. C. Udriște (coordonator) – Calcul variațional, Editura StudIS, Iași, 2013. 10. Bourguignon J.-P., <i>Variational Calculus</i> , Springer Monographs in Mathematics, 2022			

8.2 Seminar	Metode de predare-învățare	Număr de ore	Observații
Studiul continuității și diferențiabilității unor funcționale. Calculul variațiilor de ordinele 1 și 2 pentru diferite funcționale	Expunere interactivă. Învățare prin probleme	4	
Studiul punctelor de extrem local pentru diferite funcționale	Expunere interactivă. Învățare prin probleme	2	
Aflarea extreemelor unor funcționale de tip integral prin rezolvarea ecuației Euler-Lagrange sau a unor integrale prime sau a sistemului Euler-Lagrange sau a ecuației Euler-Poisson sau a ecuației Euler-Ostrogradski. Verificarea minimului sau maximului	Expunere interactivă. Învățare prin probleme	4	
Rezolvarea de probleme izoperimetrice	Expunere interactivă. Învățare prin probleme	2	
Calculul distanței dintre două puncte pe o suprafață dată	Expunere interactivă. Învățare prin probleme	2	
Calculul distanței dintre un punct și o curbă. Calculul distanței dintre două curbe	Expunere interactivă. Învățare prin probleme	2	
Folosirea unor metode directe pentru aflarea unor soluții aproximative ale unor probleme variaționale date	Expunere interactivă. Învățare prin probleme	4	
Bibliografie 1. I.M. Gelfand, S.V. Fomin – Calculus of variations. Revised english edition, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1963. 2. A. Haimovici – Ecuațiile fizicii matematice si elemente de calcul variațional, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1966. 3. F. Isaia – Calcul variațional, Note de curs 4. H. Kielhofer – Calculus of variations, Springer, Rimsting, 2018. 5. M.L. Krasnov, G.I. Makarenko, A.I. Kiselev – Problems and exercises in the Calculus of variations, Mir Publishers, Moscow, 1975. 6. G.E. Șilov – Analiză Matematică. Curs special (Ediția a doua), Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1989. 7. V.I. Smirnov – Curs de matematici superioare. Vol. IV, Editura Tehnică, București, 1956. 8. N. Teodorescu, V. Olariu – Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale, Editura Tehnică, București, 1980. 9. C. Udriște (coordonator) – Calcul variațional, Editura StudIS, Iași, 2013. 10. Bourguignon J.-P., <i>Variational Calculus</i>, Springer Monographs in Mathematics, 2022			

9. Coroborarea conținuturilor disciplinei cu așteptările reprezentanților comunităților epistemice, ale asociațiilor profesionale și ale angajatorilor reprezentativi din domeniul aferent programului

Conținuturile disciplinei *Calcul variațional* sunt aliniate la cerințele și recomandările formulate de comunitățile academice naționale și internaționale din domeniul matematicii și fizicii teoretice, reflectând tendințele actuale în învățământul superior de profil. Prin includerea unor teme fundamentale precum minimizarea unor funcționale, ecuația Euler-Lagrange și generalizări ale sale, probleme izoperimetrice, geodezice, problema Sturm-Liouville, cursul răspunde nevoii de formare a unor competențe riguroase în modelarea fenomenelor fizice, așa cum este solicitat de către organizații precum Societatea Română de Fizică, Societatea de Științe Matematice din România, precum și de

universități partenere din cadrul rețelelor de cooperare academică.

Totodată, conținutul disciplinei reflectă așteptările angajatorilor din domeniile IT, cercetare aplicată, educație și inginerie, care solicită absolvenți capabili să înțeleagă structura internă a modelelor matematice și să aplice metode analitice în analiza și simularea proceselor fizice. Această coroborare este susținută prin consultarea periodică a planului de învățământ cu partenerii educaționali și instituționali relevanți și prin adaptarea conținuturilor la profilul de competențe vizat pentru o formare de tip fundamental, dar deschisă aplicațiilor.

10. Evaluare

Tip de activitate	10.1 Criterii de evaluare	10.2 Metode de evaluare	10.3 Pondere din nota finală
10.4 Curs	Activitate continuă și participare la curs: - prezență activă și intervenții argumentate în discuțiile legate de temele principale (deducerea ecuației Euler-Lagrange și a generalizărilor acesteia, probleme izoperimetrice, problema lui Lagrange, probleme variaționale cu capete mobile); - integrarea cunoștințelor matematice (de analiză matematică, ecuații diferențiale ordinare, ecuații cu derivate parțiale, curbe și suprafețe, analiză funcțională) în studiul ecuațiilor cu derivate parțiale; - demonstrarea unei gândiri critice, riguroase și reflexive asupra rezultatelor calitative și cantitative din calculul variațional și asupra conexiunilor acestuia cu realitatea fizică.	Evaluare pe parcurs Baremul de notare este transmis studenților la începutul semestrului.	10%
10.5 Seminar	Activitate continuă și participare la seminar: - participare activă la rezolvarea problemelor ce constau în aflarea extremalelor și a punctelor de extrem pentru diferite funcționale de tip integral, în aflarea soluției unei probleme izoperimetrice, în calculul distanței dintre două puncte pe o suprafață dată, calculul distanței dintre un punct și o curbă sau dintre două curbe; - demonstrarea abilităților de aplicare corectă a cunoștințelor teoretice în rezolvarea de probleme; - rezolvarea corectă (prin realizarea unei redactări complete și clare) a problemelor prevăzute în cele trei teme primite pe parcursul semestrului (ecuația Euler-Lagrange și generalizări, probleme izoperimetrice și Lagrange, probleme variaționale cu capete mobile).	Evaluare pe parcurs Baremul de notare este transmis studenților la începutul semestrului.	30%

	Proba scrisă: - 2 subiecte teoretice: un subiect în care se cere definirea corectă de noțiuni teoretice și enunțarea corectă de rezultate teoretice însoțite de demonstrații clare, riguroase și relativ scurte și un subiect în care se cere enunțarea corectă de rezultate teoretice însoțite de demonstrații clare, riguroase și relativ lungi. - 2 subiecte aplicative în care se cere rezolvarea corectă, clară și riguroasă de probleme.	Evaluare prin examen scris Baremul de notare este transmis studenților la finalul semestrului.	60%
--	---	--	------------

10.6 Standard minim de performanță

Studentul demonstrează cunoașterea și înțelegerea noțiunilor și rezultatelor de bază din calculul variațional și dovedește capacitatea de aplicare corectă și coerentă a acestora la rezolvarea unor exerciții de bază de calcul variațional.

Obiective minime:

R.Î.1.2.3. Studentul identifică și descrie elementele esențiale din construcția demonstrațiilor unor rezultate teoretice (de ex., deducerea ecuației Euler-Lagrange, rezolvarea problemei brahistocronei).

R.Î.3.1.1. Studentul recunoaște și enunță definiții de bază pentru câteva concepte fundamentale (de ex., funcțională diferențiabilă, extremale ale unei funcționale de tip integral, probleme izoperimetrice, probleme de extrem cu capete mobile).

R.Î.3.2.2. Studentul identifică și aplică tehnicile adecvate pentru a rezolva probleme de calcul variațional (de ex., folosirea ecuației Euler-Lagrange sau a unei integrale prime a acesteia pentru rezolvarea unei probleme variaționale standard, metoda multiplicatorului lui Lagrange pentru rezolvarea unei probleme izoperimetrice), chiar dacă rezolvările conțin pași lipsă sau explicații sumare.

R.Î.3.3.1. Studentul identifică legături între două concepte din diferite discipline ale matematicii (de ex., problemă variațională standard $\leftrightarrow$ curbă brahistocronă, problemă Lagrange $\leftrightarrow$ curbe geodezice).

R.Î.3.3.2. Studentul poate face un rezumat simplu al rezolvării unei probleme (de ex., aflarea extremalelor unor funcționale de tip integral) și îl poate prezenta într-un mod lizibil, chiar dacă nu are coerență deplină.

Grilă de evaluare pe niveluri de performanță

Nivel de performanță	Descriere generală	Caracteristici
Excelent (10–9)	Studentul stăpânește toate conceptele și rezultatele teoretice dovedind o înțelegere în profunzime a demonstrațiilor acestora. Studentul stăpânește toate metodele de rezolvare a problemelor aplicând corect și creativ teoria la situații noi sau complexe.	Studentul folosește o terminologie completă și fără greșeli, este capabil de demonstrații și rezolvări clare și coerente, dovedește o gândire critică autonomă și este capabil de corelații între formalismul matematic și interpretarea fizică.
Foarte bine (8)	Studentul dovedește înțelegerea solidă a conceptelor și rezultatelor teoretice de bază. Studentul aplică în mod corect aceste rezultate în cadrul unor metode de rezolvare de probleme.	Pot apărea omisiuni sau greșeli minore în redactarea enunțurilor și demonstrațiilor unor rezultate teoretice precum și a rezolvărilor unor probleme, dar aceste redactări sunt, în general, corecte ca structură și conținut.
Bine (7)	Studentul înțelege conceptele și rezultatele teoretice de bază precum și metodele de bază. Studentul poate să aplice aceste metode în rezolvarea unor probleme, dar aplicarea lor este parțială sau incompletă.	Studentul folosește o terminologie uneori inexactă, iar demonstrațiile și rezolvările sunt schematice, incomplete sau prezintă erori de calcul.
Suficient (6)	Studentul stăpânește o parte din conceptele și rezultatele teoretice de bază precum și o parte din	Pot apărea enunțuri parțial corecte și fragmente de demonstrații și rezolvări ce

	metodele de bază. Studentul aplică mecanic aceste metode în rezolvarea unor probleme.	pot fi însoțite de lacune de logică.
Insuficient (<5)	Studentul nu stăpânește conceptele și rezultatele teoretice de bază și nici metodele de bază. Studentul nu poate aplica aceste metode în rezolvarea unor probleme.	Studentul face confuzii în ceea ce privește rezultatele teoretice și metodele de rezolvare.

Prezenta Fișă de disciplină a fost avizată în ședința de Consiliu de departament din data de 15/09/2025 și aprobată în ședința de Consiliu al facultății din data de 15/09/2025 .

Conf. dr. Ion Gabriel Stan Decan	Conf. dr. Nicușor Minculete Director de departament
Conf. dr. Florin ISAIA Titular de curs	Conf. dr. Florin ISAIA Titular de seminar

Notă:

- ¹⁾ Domeniul de studii - se alege una din variantele: Licență/ Masterat/ Doctorat (se completează conform cu Nomenclatorul domeniilor și al specializărilor/ programelor de studii universitare în vigoare);
- ²⁾ Ciclul de studii - se alege una din variantele: Licență/ Masterat/ Doctorat;
- ³⁾ Regimul disciplinei (conținut) - se alege una din variantele: **DF** (disciplină fundamentală)/ **DD** (disciplină din domeniu)/ **DS** (disciplină de specialitate)/ **DC** (disciplină complementară) - pentru nivelul de licență; **DAP** (disciplină de aprofundare)/ **DSI** (disciplină de sinteză)/ **DCA** (disciplină de cunoaștere avansată) - pentru nivelul de masterat;
- ⁴⁾ Regimul disciplinei (obligativitate) - se alege una din variantele: **DI** (disciplină obligatorie)/ **DO** (disciplină opțională)/ **DFac** (disciplină facultativă);
- ⁵⁾ Un credit este echivalent cu 25 de ore de studiu (activități didactice și studiu individual).