



**Universitatea
Transilvania
din Brașov**

**FACULTATEA DE MATEMATICĂ
ȘI INFORMATICĂ**

Str. Iuliu Maniu 50
500091 – Brașov
tel.: (+40) 268.414.016
f-mi@unitbv.ro | mateinfo.unitbv.ro

GHID LICENȚĂ

2025-2026

PROGRAMUL DE STUDIU: MATEMATICĂ – INFORMATICĂ

I. ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. Șiruri și serii de numere reale
2. Limite de funcții și continuitate
3. Teoremele clasice ale calculului diferențial
4. Teoremele clasice ale calculului integral
5. Șiruri și serii de funcții.

Bibliografie minimală:

- [1.] M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, Analiza Matematica, Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti, 1971
- [2.] Gh. Sirețchi, Calcul Diferențial și Integral, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985
- [3.] O. Stănășilă, Analiză Matematică, Editura Fundatiei Floarea Darurilor, București, 2014.
- [4.] C. Popa, V. Hiriș, M. Megan, Introducere in Analiza Matematica prin exercitii si probleme, Editura Facla, 1976.
- [5.] <https://www.cs.ubbcluj.ro/wp-content/uploads/Manual-Analiza-Matematica-2019-RO.pdf>

ȘIRURI ȘI SERII DE ELEMENTE DIN $\mathbb{R}^n$

Definiție. Fie M o mulțime. Un șir cu elemente din M este o funcție cu domeniul $\mathbb{N}$ (sau $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, \dots\}$, unde $k \in \mathbb{N}$) și codomeniul o submulțime a lui M .

Observație. Dacă $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ este un șir, valoarea lui x în n se va nota x_n (în loc de $x(n)$), iar funcția $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ se va nota $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definiție. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir cu elemente din $\mathbb{R}^p$ și $x \in \mathbb{R}^p$. Spunem că x este o limită a lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dacă în afara oricărei vecinătăți a lui x se află un număr finit de termeni ai șirului (deci există un rang începând cu care toți termenii șirului se află în vecinătate). Altfel spus, pentru orice $V \in \mathcal{V}_x$ există $n_V \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $x_n \in V$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_V$.

Vom spune că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge către x .

Dacă un șir, cu elemente din $\mathbb{R}^p$, are o limită din $\mathbb{R}^p$, vom spune că el este convergent, iar în caz contrar îl vom numi divergent.

Observație. Definiția de mai sus are sens și pentru șiruri cu elemente dintr-un spațiu topologic.

Propoziție. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir cu elemente din $\mathbb{R}^p$, un element $x \in \mathbb{R}^p$ este o limită a sa dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\|x_n - x\| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Teorema de unicitate a limitei. Un șir cu elemente din $\mathbb{R}^n$ nu poate avea mai mult de o limită.

Observație. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir cu elemente din $\mathbb{R}^p$ care are limită $x \in \mathbb{R}^p$, atunci vom scrie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Propoziție. Pentru un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale și $x \in \mathbb{R}$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_n - x| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

În conformitate cu definiția topologiei pe $\overline{\mathbb{R}}$ și a limitei unui șir de elemente dintr-un spațiu topologic, suntem conduși la următoarea

Propoziție. Pentru un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$x_n > \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Propoziție. Pentru un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$x_n < \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Propoziție. Un șir convergent din $\mathbb{R}^n$ este mărginit.

Observație. Reciproca propoziției de mai sus nu este valabilă, așa cum ne arată șirul de numere reale $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Teorema convergenței monotone. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale care este crescător (i.e. $x_n \leq x_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$). Atunci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent dacă și numai dacă este mărginit, caz în care

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Demonstrație.

" $\Rightarrow$ " Faptul că un șir convergent este mărginit s-a stabilit anterior.

Fie

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Prin urmare, având în vedere că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător, deducem că

$$l - \varepsilon \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n \leq l + \varepsilon.$$

Așadar

$$\left| \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right| \leq \varepsilon,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

” $\Leftarrow$ ” Există

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n \stackrel{not}{=} l.$$

Atunci

$$x_n \leq l,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Mai mult, având în vedere definiția supremului, pentru orice $\varepsilon > 0$ există x_{n_ε} astfel încât

$$l - \varepsilon < x_{n_\varepsilon},$$

de unde, deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător, deducem că

$$l - \varepsilon < x_n \leq l < l + \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, adică

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n. \quad \square$$

Teorema convergenței monotone stă la baza stabilirii următorului rezultat.

Propoziție. *Șirurile*

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

și

$$\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

sunt convergente și au aceeași limită notată cu e .

Conceptul de serie, care încearcă să dea sens "sumelor infinite", s-a dovedit util în definirea unor constante importante (ca, de exemplu, e și π), precum și în definirea riguroasă a funcțiilor elementare.

Definiție. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente din $\mathbb{R}^p$, definim seria generată de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ca fiind șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

Dacă șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

se numește suma seriei.

x_n -urile poartă numele de termenii seriei, iar S_n -urile de sume parțiale.

Prin convenție, simbolurile

$$\sum x_n, \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \text{ sau } \sum_{n \geq 1} x_n$$

vor desemna atât seria generată de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cât și suma sa, în cazul în care seria este convergentă.

Observație. Deși, în general, termenii unei serii sunt indexați cu ajutorul mulțimii numerelor naturale, există situații în care este de preferat să începem indexarea cu $n = 0$ sau cu $n = k$, unde $k \in \mathbb{N}$.

Exemplu. Să se afle suma seriei $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

Deoarece

$$\frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k - 1} - \frac{1}{2k + 1} \right),$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$, obținem că

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n + 1} \right),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Drept urmare seria considerată este convergentă și suma sa este $\frac{1}{2}$.

Propoziție. Dacă seria $\sum x_n$, cu termeni din $\mathbb{R}^p$, este convergentă, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Reciproca nu este adevărată.

Demonstrație. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0.$$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ arată că reciproca nu este validă. $\square$

Cele două criterii de comparație prezentate mai jos, aplicabile seriilor cu termeni pozitivi, sunt utile atunci când dispunem de serii standard a căror natură este cunoscută (de obicei acestea sunt seria geometrică și seria armonică), de inegalități și limite adecvate.

Criteriul de comparație cu inegalități. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de elemente din $[0, \infty)$ astfel încât:

i) există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că

$$x_n \leq y_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$;

ii) $\sum y_n$ este convergentă.

Atunci $\sum x_n$ este convergentă.

Criteriul de comparație la limită. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de elemente din $(0, \infty)$.

α) Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0, \infty)$, atunci seriile $\sum x_n$ și $\sum y_n$ au aceeași natură.

β) Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ și seria $\sum y_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este convergentă.

γ) Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$ și seria $\sum y_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este divergentă.

Exemple standard de serii (seria geometrică și seria armonică)

1. Pentru $a \in \mathbb{R}$, seria

$$\sum a^n,$$

numită seria geometrică, este convergentă dacă și numai dacă $|a| < 1$.

2. Pentru $a \in \mathbb{R}$, seria

$$\sum \frac{1}{n^a},$$

numită seria armonică generalizată, este convergentă dacă și numai dacă $a > 1$.

Remarcă. Denumirea de serie armonică generalizată are drept temei faptul că, în cazul $a = 1$, orice termen al seriei, începând cu cel de al doilea, este media armonică a termenilor vecini. Pentru $a > 1$, suma seriei $\sum \frac{1}{n^a}$ se notează cu $\zeta(a)$. Funcția astfel construită, numită funcția ζ a lui Riemann, este un ingredient principal în studiul distribuției asimptotice a numerelor prime și în celebra conjectură a lui Riemann, rămasă fără răspuns până în acest moment.

Următoarele trei criterii sunt extrem de utile pentru stabilirea naturii unei serii cu termeni pozitivi.

Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy). Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente din $[0, \infty)$ astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \stackrel{\text{not}}{=} r,$$

atunci:

- a) seria $\sum x_n$ este convergentă pentru $r \in [0, 1)$;
- b) seria $\sum x_n$ este divergentă pentru $r \in (1, \infty)$;
- c) nu putem preciza natura seriei $\sum x_n$ pentru $r = 1$.

Criteriul raportului (al lui D'Alembert). Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente din $(0, \infty)$ astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \stackrel{\text{not}}{=} r,$$

atunci:

- a) seria $\sum x_n$ este convergentă pentru $r \in [0, 1)$;
- b) seria $\sum x_n$ este divergentă pentru $r \in (1, \infty)$;
- c) nu putem preciza natura seriei $\sum x_n$ pentru $r = 1$.

Criteriul lui Raabe-Duhamel. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente din $(0, \infty)$ astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \stackrel{\text{not}}{=} r,$$

atunci:

- a) seria $\sum x_n$ este convergentă pentru $r \in (1, \infty)$;
- b) seria $\sum x_n$ este divergentă pentru $r \in (-\infty, 1)$;
- c) nu putem preciza natura seriei $\sum x_n$ pentru $r = 1$.

Exemplu. Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (3n)} \right)^2.$$

Notând cu x_n termenul general al seriei, un calcul simplu arată că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \frac{4}{3} > 1,$$

deci, conform criteriului lui Raabe-Duhamel, seria este convergentă.

Următoarele criterii constituie instrumente indispensabile pentru stabilirea naturii unor serii care nu au neapărat termenii pozitivi.

Criteriul lui Dirichlet. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de elemente din $\mathbb{R}$ satisfăcând următoarele proprietăți:

- i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir descrescător de numere reale pozitive care converge către 0;
- iii) $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ este mărginit, unde $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ este șirul sumelor parțiale ale seriei $\sum y_n$.

Atunci seria

$$\sum x_n y_n$$

este convergentă.

Criteriul lui Leibniz. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de elemente din $[0, \infty)$ satisfăcând următoarele două proprietăți:

- i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător;
- ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Atunci seria alternată $\sum (-1)^n x_n$ este convergentă.

Criteriul lui Abel. Fie $\sum y_n$ o serie de elemente din $\mathbb{R}$ și $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de elemente din $\mathbb{R}$ satisfăcând următoarele proprietăți:

- i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton și convergent;
- ii) $\sum y_n$ este convergentă.

Atunci seria $\sum x_n y_n$ este convergentă.

Exemplu. Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n \geq 1} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}).$$

Avem

$$\begin{aligned} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) &= \sin(\pi(\sqrt{n^2 + 1} - n + n)) = \\ &= (-1)^n \sin(\pi(\sqrt{n^2 + 1} - n)) = (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n}, \end{aligned}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Folosind Criteriul lui Leibniz, deducem că seria considerată este convergentă.

CONTINUITATE ȘI LIMITE

Definiție. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $a \in D$. Spunem că funcția f este continuă în a dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}_{f(a)}$ există $U \in \mathcal{V}_a$ (care depinde de V) astfel încât

$$f(x) \in V,$$

pentru orice $x \in D \cap U$.

Observație. Definiția de mai sus are un caracter pur topologic, ea putând fi formulată și în cadrul spațiilor topologice.

Observație. Din definiția de mai sus decurge faptul că dacă $a \in D \setminus D'$ (i.e. a este un punct izolat al lui D , adică există $U \in \mathcal{V}_a$ cu proprietatea că $U \cap D = \{a\}$), atunci f este continuă în a .

Teorema de caracterizare a continuității într-un punct. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $a \in D$.

Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) f este continuă în a .
- b) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in D$ cu $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$.

- c) Pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de elemente din D , care converge către a , șirul $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge către $f(a)$.

Demonstrație.

a) $\Rightarrow$ b)

Cum $B(f(a), \varepsilon) \in \mathcal{V}_{f(a)}$, există $U \in \mathcal{V}_a$ cu proprietatea că

$$x \in U \cap D \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon).$$

Deoarece există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $B(a, \delta_\varepsilon) \subseteq U$, justificarea implicației este încheiată.

b) $\Rightarrow$ c)

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de elemente din D , care converge către a .

Fie $\varepsilon > 0$.

Atunci există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că

$$\|x_n - a\| < \delta_\varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Așadar

$$\|f(x_n) - f(a)\| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, ceea ce arată că șirul $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge către $f(a)$.

c) $\Rightarrow$ a)

Presupunem, prin reducere la absurd, că a) este falsă.

Atunci există $V_0 \in \mathcal{V}_{f(a)}$ cu proprietatea că pentru orice $U \in \mathcal{V}_a$ există $x_U \in D \cap U$ astfel încât

$$f(x_U) \notin V_0.$$

În particular, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $x_n \in D \cap B(a, \frac{1}{n})$ astfel încât

$$f(x_n) \notin V_0,$$

fapt care contrazice c). $\square$

Cadrul în care vom lucra în continuare este următorul: se consideră $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, $x_0 \in D'$ și $l \in \mathbb{R}^q$.

Definiție. Vom spune că f tinde către l atunci când x tinde către x_0 dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}_l$ există $U \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât

$$f(x) \in V,$$

pentru orice $x \in (U \cap D) \setminus \{x_0\}$, i.e.

$$f((U \cap D) \setminus \{x_0\}) \subseteq V.$$

Vom nota această situație prin

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l.$$

Teoremă. În cadrul de mai sus, dacă pentru $l, l' \in \mathbb{R}^q$, avem

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l \text{ și } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l',$$

atunci

$$l = l'.$$

Valoarea l , unic determinată de proprietatea $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$, poartă numele de limita lui f atunci când x tinde către x_0 .

Vom marca această situație astfel:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Limite fundamentale

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $a \in A \cap A'$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție elementară.

Atunci

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

În plus, avem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

unde $a \in (0, \infty)$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r,$$

unde $r \in \mathbb{R}$.

Teorema de caracterizare a limitei unei funcții într-un punct. În cadrul de mai sus, următoarele afirmații sunt echivalente:

$\alpha)$ Există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

$\beta)$ Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\|f(x) - l\| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in D$ cu proprietatea că $0 < \|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$.

$\gamma)$ Pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din $D \setminus \{x_0\}$ cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l.$$

Exemplu. Nu există $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$, deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} = 1 \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}} = 0.$$

Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și x_0 un punct de acumulare (eventual infinit) al mulțimii D . Spunem că $l \in \mathbb{R}$ este limita funcției f în punctul x_0 dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}_l$ există $U \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât

$$f(x) \in V,$$

pentru orice $x \in (D \cap U) \setminus \{x_0\}$, i.e.

$$f((D \cap U) \setminus \{x_0\}) \subseteq V.$$

Această situație se marchează prin notația

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Observații. Definiția de mai sus ne conduce la următoarele:

1. Pentru $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ există $\delta > 0$ astfel încât $f(x) > \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea $0 < |x - x_0| < \delta$.

2. Pentru $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ există $\delta > 0$ astfel încât $f(x) < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea $0 < |x - x_0| < \delta$.

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ există $\delta \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) > \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea $x > \delta$.

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ există $\delta \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea $x > \delta$.

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ există $\delta \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) > \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea $x < \delta$.

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ există $\delta \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea $x < \delta$.

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ există $\delta \in \mathbb{R}$ astfel încât $|f(x) - l| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea $x > \delta$.

8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ există $\delta \in \mathbb{R}$ astfel încât $|f(x) - l| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea $x < \delta$.

9. Situațiile descrise anterior pot fi caracterizate și cu ajutorul șirurilor, așa cum ne indică punctul γ) al Teoremei de caracterizare a limitei unei funcții într-un punct.

10. Comportamentul limitelor de funcții la operațiile algebrice precum și la trecerea la limită în inegalități este similar celui din cazul șirurilor.

Teorema de caracterizare a continuității într-un punct de acumulare. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $x_0 \in D' \cap D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Atunci, următoarele afirmații sunt echivalente:

α) f este continuă în x_0 .

β) Există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right).$$

Demonstrație.

$\alpha) \Rightarrow \beta)$ Pentru a arăta că există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ este suficient să arătăm că pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D \setminus \{x_0\}$ cu proprietatea că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Acest fapt decurge din caracterizarea continuității lui f în x_0 cu ajutorul șirurilor.

$\beta) \Rightarrow \alpha)$ Faptul că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

pentru orice $x \in D$ cu $\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$ este imediat din ipoteză.

Acest lucru arată că f este continuă în x_0 . $\square$

TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE CALCULULUI DIFERENȚIAL

Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in D \cap D'$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.
Dacă există (în $\overline{\mathbb{R}}$), limita

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

se numește derivata lui f în c și se notează $f'(c)$.

Dacă $f'(c)$ este finită, spunem că f este derivabilă în c .

Dacă f este derivabilă în toate punctele unei mulțimi $E \subseteq D$, atunci spunem că f este derivabilă pe E .

Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Punctul c se numește punct de maxim local (relativ) al funcției f dacă există $\delta > 0$ astfel încât

$$f(c) \geq f(x),$$

pentru orice $x \in D \cap (c - \delta, c + \delta)$.

Punctul c se numește punct de minim local (relativ) al funcției f dacă există $\delta > 0$ astfel încât

$$f(c) \leq f(x),$$

pentru orice $x \in D \cap (c - \delta, c + \delta)$.

Punctele de maxim local și cele de minim local se numesc puncte de extrem local.

Teorema lui Fermat. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, c un punct din interiorul intervalului I și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:

- i) c este un punct de extrem local al funcției f ;
- ii) f este derivabilă în c .

Atunci

$$f'(c) = 0.$$

Demonstrație. Fără pierderea generalității, putem presupune că c este un punct de maxim local.

Prin urmare există $\delta > 0$ astfel încât

$$f(c) \geq f(x),$$

pentru orice $x \in (c - \delta, c + \delta) \subseteq I$.

Așadar

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

pentru orice $x \in (c, c + \delta)$ și

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

pentru orice $x \in (c - \delta, c)$.

În consecință, avem

$$0 \leq \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

deci

$$f'(c) = 0. \quad \square$$

Observații

1. *Condiția ca c să fie un punct din interiorul intervalului I este esențială, așa cum arată următorul exemplu: $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x) = x$ pentru orice $x \in [0, 1]$.*

2. *Funcția f poate avea puncte de extrem în care să nu fie derivabilă, așa cum arată următorul exemplu: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x) = |x|$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.*

3. *Este posibil ca $f'(c) = 0$ fără ca c să fie punct de extrem local, așa cum arată următorul exemplu: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x) = x^3$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.*

4. *Interpretarea geometrică a Teoremei lui Fermat: într-un punct de extrem din interiorul intervalului I în care f este derivabilă, tangenta la graficul funcției este paralelă cu axa Ox .*

Teorema lui Rolle. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ având următoarele proprietăți:

i) f este continuă pe $[a, b]$;

ii) f este derivabilă pe (a, b) ;

iii) $f(a) = f(b)$.

Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f'(c) = 0.$$

Demonstrație. Printr-o eventuală înlocuire a lui f cu $f - f(a)$, putem presupune că

$$f(a) = f(b) = 0.$$

De asemenea, putem presupune că f nu este identic nulă (căci altfel concluzia este imediată) și că ia și valori strict pozitive (printr-o eventuală înlocuire a lui f cu $-f$).

Atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât

$$f(c) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Vom arăta că

$$c \in (a, b).$$

Într-adevăr, dacă

$$c \in \{a, b\},$$

atunci

$$0 = f(a) = f(b) = f(c) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \geq f(x),$$

pentru orice $x \in [a, b]$, ceea ce contrazice faptul că f ia și valori strict pozitive.

Deci

$$c \notin \{a, b\}.$$

Teorema lui Fermat ne asigură că

$$f'(c) = 0. \quad \square$$

Observații

1. În general, *punctul c din concluzia Teoremei lui Rolle nu este unic*, așa cum ne arată cazul funcțiilor constante.

2. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval nedegenerat al axei reale, o funcție derivabilă. Atunci:

α) Între două soluții consecutive ale ecuației $f(x) = 0$ se află cel puțin o soluție a ecuației $f'(x) = 0$.

β) Între două soluții consecutive ale ecuației $f'(x) = 0$ se află cel mult o soluție a ecuației $f(x) = 0$.

3. Interpretarea geometrică a Teoremei lui Rolle: în ipotezele Teoremei lui Rolle, există cel puțin un punct al graficului lui f în care tangenta la graficul funcției f este orizontală.

Teorema lui Lagrange. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ având următoarele proprietăți:

i) f este continuă pe $[a, b]$;

ii) f este derivabilă pe (a, b) .

Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Demonstrație. Să considerăm funcția $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

pentru orice $x \in [a, b]$, care este diferența dintre f și funcția care are ca grafic segmentul de capete $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$.

Prin aplicarea teoremei anterioare funcției φ se obține concluzia. $\square$

Interpretarea geometrică a Teoremei lui Lagrange

În ipotezele Teoremei lui Lagrange, există cel puțin un punct al graficului lui f în care tangenta la grafic este paralelă cu segmentul de capete $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$.

Consecințe ale Teoremei lui Lagrange

În cadrul teoremei de mai sus, avem:

α) Dacă

$$f'(x) = 0,$$

pentru orice $x \in (a, b)$, atunci f este constantă.

$\beta)$ Dacă

$$f'(x) \geq 0 \text{ (} f'(x) > 0 \text{),}$$

pentru orice $x \in (a, b)$, atunci f este crescătoare (strict crescătoare).

$\gamma)$ Dacă

$$f'(x) \leq 0 \text{ (} f'(x) < 0 \text{),}$$

pentru orice $x \in (a, b)$, atunci f este descrescătoare (strict descrescătoare).

Exemplu. Să se arate că

$$e^x \geq x + 1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = e^x - x - 1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are proprietatea că

$$f'(x) = e^x - 1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci

$$f'(x) \geq 0,$$

pentru orice $x \geq 0$ și

$$f'(x) \leq 0,$$

pentru orice $x \leq 0$.

Prin urmare, f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, \infty)$.

Așadar 0 este punct de minim global, i.e.

$$f(x) \geq f(0) = 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $e^x \geq x + 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Corolarul Teoremei lui Lagrange privind existența derivatei unei funcții într-un punct. Fie I un interval nedegenerat al axei reale, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in I$ astfel încât:

- i) f este continuă;
- ii) f este derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$;
- iii) există $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

Atunci:

$\alpha)$ Există $f'(x_0)$.

$\beta)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x).$$

Demonstrație.

Este suficient să arătăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x),$$

pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I \setminus \{x_0\}$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

Aplicând Teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul de capete x_0 și x_n , există ζ_n între x_0 și x_n astfel încât

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(\zeta_n).$$

Cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = x_0,$$

deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(\zeta_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x),$$

i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x). \quad \square$$

Exemplu. Să se studieze derivabilitatea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Avem

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x^2+1}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \frac{2}{x^2+1}, & x \in (-1, 1) \end{cases}.$$

Este ușor de văzut că f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Deoarece

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} -\frac{2}{x^2 + 1} = -1,$$

deducem că

$$f'_s(-1) = -1.$$

Similar obținem $f'_d(-1) = 1$, $f'_s(1) = 1$ și $f'_d(1) = -1$.

Așadar f nu este derivabilă în -1 și 1 .

TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE CALCULULUI INTEGRAL

Definiție. Se numește *partiție* a intervalului închis și mărginit $[a, b]$, din $\mathbb{R}$, un sistem de puncte

$$P = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

din $[a, b]$ astfel încât

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

unde $n \in \mathbb{N}$.

Cea mai mare dintre lungimile intervalelor $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ se numește *norma partiției* P și se notează cu $\|P\|$.

Așadar

$$\|P\| = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (x_i - x_{i-1}).$$

Definiție. Fie $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ o partiție a intervalului $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Un sistem de n puncte

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

cu proprietatea că

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, se numește *sistem de puncte intermediare asociat partiției* P .

Definiție. Fie

$$P = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

o partiție a lui $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$,

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

un sistem de puncte intermediare asociat partiției P și o funcție

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Numărul real

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

care va fi notat prin

$$\sigma_P(f, \xi),$$

se numește suma Riemann asociată funcției f , partiției P și sistemului de puncte intermediare ξ .

Definiție. O funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se numește integrabilă Riemann dacă există un număr real I_f cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$|\sigma_P(f, \xi) - I_f| < \varepsilon,$$

pentru orice partiție P a intervalului $[a, b]$ cu $\|P\| < \delta_\varepsilon$ și orice ξ sistem de puncte intermediare asociat partiției P .

Numărul real I_f (dacă există) este unic, se numește integrala Riemann sau integrala definită a funcției f pe intervalul $[a, b]$ și se notează

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Teorema de caracterizare a integrabilității Riemann cu ajutorul șirurilor de sume Riemann. Pentru orice funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- i) Funcția f este integrabilă Riemann.
- ii) Există un număr real I_f cu proprietatea că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{P_n}(f, \xi^n) = I_f,$$

pentru orice șir de partiții $(P_n)_n$ ale intervalului $[a, b]$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0$, și pentru orice sisteme de puncte intermediare ξ^n asociate partițiilor P_n .

În acest caz, avem

$$I_f = \int_a^b f(x)dx.$$

Teoremă. Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, atunci f este mărginită.

Definiție. O submulțime A a lui $\mathbb{R}$ se numește neglijabilă Lebesgue (sau de măsură Lebesgue nulă) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un șir $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervale deschise și mărginite satisfăcând următoarele două proprietăți:

i)

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n;$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon.$$

Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann. Pentru orice funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, următoarele afirmații sunt echivalente:

i) f este integrabilă.

ii) f este mărginită și mulțimea punctelor în care f este discontinuă este neglijabilă Lebesgue.

Corolar. Orice funcție continuă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann.

Corolar. Orice funcție monotonă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann.

Formula Leibniz-Newton. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care satisface următoarele două proprietăți:

i) f este integrabilă Riemann;

ii) f admite primitive.

Atunci

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

unde F este o primitivă arbitrară a lui f .

Demonstrație. Fie $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de partiții ale intervalului $[a, b]$ cu proprietatea că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0,$$

unde

$$P_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{m_n-1}^n, x_{m_n}^n).$$

Având în vedere Teorema lui Lagrange, deducem că, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, m_n\}$, există

$$\xi_i^n \in (x_{i-1}^n, x_i^n)$$

astfel încât

$$F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n) = F'(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n),$$

i.e.

$$F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n) = f(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n).$$

Dacă vom considera sistemul de puncte intermediare

$$\xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \dots, \xi_{m_n-1}^n, \xi_{m_n}^n)$$

asociat partiției P_n a intervalului $[a, b]$, atunci

$$\begin{aligned} \sigma_{P_n}(f, \xi^n) &= \sum_{i=1}^{m_n} f(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{m_n} (F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n)) = \\ &= F(x_{m_n}^n) - F(x_0^n) = F(b) - F(a), \end{aligned}$$

i.e.

$$\sigma_{P_n}(f, \xi^n) = F(b) - F(a), \tag{1}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Deoarece f este integrabilă și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0,$$

conform Teoremei anterioare,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{P_n}(f, \xi^n) = \int_a^b f(x) dx,$$

de unde, conform cu (1), obținem

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad \square$$

Observație. Orice funcție continuă satisface condițiile i) și ii) din Teorema Leibniz-Newton.

Teorema de medie pentru integrala Riemann. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă. Atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c).$$

Teoremă. Pentru orice $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă, funcția $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

pentru orice $x \in [a, b]$, este derivabilă și

$$F' = f$$

(i.e. F este o primitivă a lui f).

Demonstrație. Pentru $c \in [a, b]$ arbitrar ales, vom arăta că există

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c}$$

și că

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c).$$

În acest scop, vom considera un șir arbitrar $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din $[a, b] \setminus \{c\}$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = c,$$

și vom dovedi că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(u_n) - F(c)}{u_n - c} = f(c).$$

Într-adevăr, conform Teoremei de medie pentru integrala Riemann, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există c_n , între c și u_n , cu proprietatea că

$$F(u_n) - F(c) = f(c_n)(u_n - c),$$

de unde

$$\frac{F(u_n) - F(c)}{u_n - c} = f(c_n). \quad (1)$$

Cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$$

(căci

$$|c_n - c| \leq |u_n - c|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = c)$$

și f este continuă în c , prin trecere la limită în (1), după $n \rightarrow \infty$, deducem că există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(u_n) - F(c)}{u_n - c}$ și că valoarea sa este $f(c)$. $\square$

Exercițiu. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{\sin^3 x}.$$

Teorema de schimbare de variabilă. Fie $\phi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ și $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât:

i) ϕ este de clasă $\mathcal{C}_1$ i.e. este derivabilă, cu derivata continuă;

ii) f este continuă.

Atunci:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\phi(x)) \phi'(x) dx.$$

Demonstrație. Dacă F este o primitivă a funcției f , atunci $F \circ \phi$ este o primitivă a funcției $(f \circ \phi) \phi'$ și Formula Leibniz-Newton ne îndreptățește să scriem egalitățile

$$\int_a^b f(\phi(x)) \phi'(x) dx = (F \circ \phi)(b) - (F \circ \phi)(a) = F(\phi(b)) - F(\phi(a))$$

și

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt = F(\phi(b)) - F(\phi(a)),$$

de unde deducem concluzia. $\square$

Exemplu. Să se calculeze

$$\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx.$$

Avem

$$\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 e^t dt = \frac{1}{3} e^t \Big|_0^1 = \frac{e-1}{3}.$$

Teorema de integrare prin părți. Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții de clasă $\mathcal{C}^1$.

Atunci

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Demonstrație. Deoarece

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

avem

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx,$$

de unde, utilizând formula Leibniz-Newton, deducem că

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

i.e. concluzia. $\square$

Exemplu. Să se calculeze

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$$

Cu notația

$$I \stackrel{not}{=} \int_0^{\pi} e^x \sin x dx,$$

avem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} (e^x)' \sin x dx = e^x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x (\sin x)' dx = \\ &= - \int_0^{\pi} e^x \cos x dx = - \int_0^{\pi} (e^x)' \cos x dx = \\ &= -e^x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x (\cos x)' dx = e^{\pi} + 1 - \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \\ &= e^{\pi} + 1 - I, \end{aligned}$$

de unde

$$I = \frac{e^{\pi} + 1}{2},$$

i.e.

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \frac{e^{\pi} + 1}{2}.$$

ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII

Definiție. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, și $f : D_0 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Spunem că șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (simplu), pe D_0 , către f , și vom nota

$$f_n \xrightarrow{s} f,$$

dacă, pentru orice $x \in D_0$, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

i.e. pentru orice $x \in D_0$ și orice $\varepsilon > 0$ există $n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_{x,\varepsilon}$.

Exemplu. Se constată ușor că șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este descrisă de

$$f_n(x) = x^n,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$, converge simplu către funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ descrisă de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Observație. Suntem interesați în a studia în ce măsură proprietățile funcțiilor f_n se transmit la funcția f . Așa cum arată exemplul de mai sus (unde deși funcțiile f_n sunt continue, funcția limită nu are această proprietate), convergența simplă nu este instrumentul adecvat acestui scop. O analiză geometrică a exemplului de mai sus arată că motivul discontinuității funcției limită în 1 este faptul că, pe măsură ce n crește, graficul lui f_n se depărtează de graficul lui f în apropierea lui 1. Prin urmare avem nevoie de o nouă noțiune de convergență pentru șiruri de funcții, convergență care să oblige "graficul lui f_n să converge către graficul lui f ".

Definiție. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, și $f : D_0 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Spunem că șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform, pe D_0 , către f , și vom nota

$$f_n \xrightarrow{u} f,$$

dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ și orice $x \in D_0$.

Observație. În cazul în care $p = q = 1$, $f_n \xrightarrow{u} f$ înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon,$$

pentru orice $x \in D_0$ și orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât graficul lui f_n se află între $G_{f-\varepsilon}$ și $G_{f+\varepsilon}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, adică "graficul lui f_n converge către graficul lui f ".

Observație. Noțiunea de convergență uniformă pentru șiruri de funcții este cea care permite transferul proprietăților lui f_n la f , în particular, permite permutarea limitei cu derivata și cu integrala. De asemenea, ea ne permite construcția unor obiecte matematice foarte "exotice", ca de exemplu funcții din $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$ care sunt continue, dar sunt nederivabile în orice punct al lui $\mathbb{R}$, curbe a căror imagine umple un pătrat etc.

Propoziție. Un șir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funcții mărginite, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, converge uniform, pe D_0 , către $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ dacă și numai dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} \|f_n(x) - f(x)\| = 0.$$

Teorema de transport a continuității prin convergența uniformă. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, un șir de funcții continue care converge uniform către $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$. Atunci f este continuă.

Demonstrație. Deoarece șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform către f , pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ și orice $x \in D$ să avem

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pentru a arăta că f este continuă într-un punct arbitrar $a \in D$, să observăm că

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(a)\| &\leq \|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)\| + \|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)\| + \|f_{n_\varepsilon}(a) - f(a)\| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)\| + \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Deoarece f_{n_ε} este continuă în a , există $\delta_{\varepsilon,a} > 0$, astfel încât dacă $x \in D$ și $\|x - a\| < \delta_{\varepsilon,a}$, atunci

$$\|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ca atare, dacă $x \in D$ și $\|x - a\| < \delta_{\varepsilon,a}$, avem

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

ceea ce stabilește continuitatea lui f în a .

Teorema de permutare a limitei cu derivata. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții, unde $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, cu următoarele proprietăți:

- i) I este un interval nedegenerat și mărginit din $\mathbb{R}$;
- ii) există $x_0 \in I$ astfel încât șirul $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent;
- iii) f_n este derivabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- iv) șirul $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform către o funcție $g : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Atunci:

α) Există o funcție derivabilă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform către f ;

β) $f' = g$, i.e.

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Demonstrație. Vom folosi următoarele notații:

- $l(I)$ reprezintă lungimea intervalului I

-

$$\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

α) Pentru $x \in I$, $m, n \in \mathbb{N}$, conform Teoremei lui Lagrange aplicată funcției $f_m - f_n$ pe intervalul de capete x și x_0 , există y între x și x_0 astfel încât

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)(f'_m(y) - f'_n(y)).$$

Ca atare

$$\|f_m - f_n\| \leq |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + l(I) \|f'_m - f'_n\|,$$

de unde, folosind Criteriul lui Cauchy pentru convergență uniformă și faptul că $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent, deducem că șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform către o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

β) Fie $c \in I$.

Vom arăta că f este derivabilă în c și că

$$f'(c) = g(c).$$

Pentru $x \in I$ arbitrar ales, conform Teoremei lui Lagrange aplicată funcției $f_m - f_n$ pe intervalul de capete x și c , există z între x și c astfel încât

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(c) - f_n(c) + (x - c)(f'_m(z) - f'_n(z)).$$

În consecință avem

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \leq \|f'_m - f'_n\|, \quad (1)$$

pentru orice $x \in I \setminus \{c\}$.

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar, dar fixat.

Deoarece șirul $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\|f'_m - f'_n\| < \varepsilon,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$, deci, trecând la limită, în (1), după m tinzând la ∞ , obținem

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \leq \varepsilon, \quad (2)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(c) = g(c),$$

există $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f'_n(c) - g(c)| < \varepsilon, \quad (3)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m_\varepsilon$.

Deoarece f_{k_ε} , unde $k_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$, este derivabilă în c , există δ (depinzând de k_ε , deci de ε) astfel încât

$$\left| \frac{f_{k_\varepsilon}(x) - f_{k_\varepsilon}(c)}{x - c} - f'_{k_\varepsilon}(c) \right| < \varepsilon, \quad (4)$$

pentru orice x cu proprietatea că $0 < |x - c| < \delta$.

Prin urmare

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - g(c) \right| \stackrel{(2),(3)\&(4)}{\leq} \\ & \leq \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{f_{k_\varepsilon}(x) - f_{k_\varepsilon}(c)}{x - c} \right| + \left| \frac{f_{k_\varepsilon}(x) - f_{k_\varepsilon}(c)}{x - c} - f'_{k_\varepsilon}(c) \right| + |f'_{k_\varepsilon}(c) - g(c)| < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

pentru orice x cu proprietatea că $0 < |x - c| < \delta$, ceea ce arată că f este derivabilă în c și că $f'(c) = g(c)$. $\square$

Teorema de permutare a limitei cu integrala. Fie $f, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$, astfel încât următoarele proprietăți sunt satisfăcute:

- ii) f_n este integrabilă Riemann pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- iii) șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform către funcția f .

Atunci:

- α) f este integrabilă Riemann;
- β)

$$\int_a^b f = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Demonstrație.

α) Deoarece $f_n \xrightarrow{u} f$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_{n_0}(x) - f(x)| < 1,$$

de unde

$$\begin{aligned} |f(x)| & \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq \\ & \leq \sup_{x \in [a, b]} |f_{n_0}(x) - f(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |f_{n_0}(x)| < \\ & < 1 + \sup_{x \in [a, b]} |f_{n_0}(x)|, \end{aligned}$$

pentru orice $x \in [a, b]$, ceea ce, având în vedere mărginirea funcției f_{n_0} (care decurge din integrabilitatea ei) ne asigură mărginirea lui f .

Conform Criteriului lui Lebesgue, mulțimea

$$D_n = \{x \in [a, b] \mid f_n \text{ nu este continuă în } x\}$$

este neglijabilă Lebesgue pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ este neglijabilă Lebesgue.

Cum

$$D = \{x \in [a, b] \mid f \text{ nu este continuă în } x\} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n,$$

deducem că D este neglijabilă Lebesgue.

Prin urmare, conform Criteriului lui Lebesgue, concluzionăm că f este integrabilă. $\square$

β) Avem

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Deoarece $f_n \xrightarrow{u} f$ avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

deci, având în vedere Lema cleștelui, concluzionăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f. \quad \square$$

Exemplu. Să arate că există și să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 + x^2) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x} dx.$$

Șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

este dată de

$$f_n(x) = (1+x^2) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [0, 1]$, converge simplu către funcția

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

dată de

$$f(x) = (1+x^2)e^x,$$

pentru orice $x \in [0, 1]$.

Deoarece

$$|f_n(x) - f(x)| = (1+x^2) \frac{x}{x+n} \frac{1-e^{2x}}{e^x} \leq \frac{2}{n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [0, 1]$, deducem că

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

i.e.

$$f_n \xrightarrow{u} f.$$

Prin urmare, folosind Teorema de permutare a limitei cu integrala, deducem că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1+x^2) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \\ &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1+x^2)e^x dx. \end{aligned}$$

Având în vedere formula de integrare prin părți, avem

$$\int_0^1 (1+x^2)e^x dx = \int_0^1 (1+x^2)(e^x)' dx = (1+x^2)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (1+x^2)' e^x dx =$$

$$\begin{aligned}
&= 2e - 1 - 2 \int_0^1 x(e^x)' dx = 2e - 1 - 2[xe^x]_0^1 - \int_0^1 x' e^x dx = \\
&= -1 + 2 \int_0^1 e^x dx = -1 + 2e^x \Big|_0^1 = 2e - 3.
\end{aligned}$$

Așadar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1+x^2) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx = 2e - 3.$$

Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $f_n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $S_n = f_1 + \dots + f_n$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Spunem că:

- i) seria de funcții $\sum_n f_n$ converge către f dacă șirul de funcții $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge către f ;
- ii) seria de funcții $\sum_n f_n$ converge uniform către f dacă șirul de funcții $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform către f ;
- iii) seria de funcții $\sum_n f_n$ converge absolut dacă seria $\sum_n |f_n(x)|$ este convergentă pentru orice $x \in D$.

Folosind rezultatele privind transportul de proprietăți pentru șirurile de funcții se pot deduce rezultate similare pentru serii de funcții.

Teoremă. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $f_n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât:

- i) f_n este continuă pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- ii) seria de funcții $\sum_n f_n$ converge uniform către f .

Atunci f este continuă.

Teoremă. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $f_n, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât:

- i) f_n este integrabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- ii) seria de funcții $\sum_n f_n$ converge uniform către f .

Atunci:

$\alpha)$ f este integrabilă;

$$\beta) \int_a^b f = \int_a^b \sum_n f_n = \sum_n \int_a^b f_n.$$

Teoremă. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ și $x_0 \in [a, b]$ astfel încât:

i) seria $\sum_n f_n(x_0)$ este convergentă;

ii) seria de funcții $\sum_n f_n'$ converge uniform.

Atunci există $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ având următoarele două proprietăți:

a) seria de funcții $\sum_n f_n$ converge uniform către f .

b) $(\sum_n f_n)' = f' = \sum_n f_n'$.

Criteriul lui Weierstrass privind seriile de funcții. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât există un șir de numere reale $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ având următoarele două proprietăți:

i)

$$|f_n(x)| \leq M_n,$$

pentru orice $x \in D$ și orice $n \in \mathbb{N}$;

ii) seria $\sum_n M_n$ este convergentă.

Atunci seria de funcții $\sum_n f_n$ converge absolut și uniform.

Exemplu. Să se arate că seria

$$\sum_n \frac{x^n}{n^2}$$

converge uniform pe $[-1, 1]$.

Deoarece

$$\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [-1, 1]$ și seria

$$\sum_n \frac{1}{n^2}$$

este convergentă, conform Criteriului lui Weierstrass, seria $\sum_n \frac{x^n}{n^2}$ converge uniform pe $[-1, 1]$.

Exerciții propuse

1. Să se arate că șirul $(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.
2. Să se afle suma seriei $\sum_{n \geq 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.
3. Să se studieze natura seriei $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}$.
4. Să se studieze natura seriei $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+5}$.
5. Să se studieze natura seriei $\sum_{n \geq 1} (a^{\frac{n^2+n+1}{n^2}})^n$, $a > 0$.
6. Să se studieze natura seriei $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n^p}$, $a > 0$, $p \in \mathbb{R}$.
7. Să se studieze natura seriei $\sum_{n \geq 1} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.
8. Să se studieze natura seriei $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n \cos n^2}{\sqrt{n}}$.
9. Să se studieze natura seriei $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.
10. Să se arate că nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ și $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, unde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este dată de $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.
11. Să se calculeze:
 - i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9-x}{3-\sqrt{x}}$;
 - ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$;
 - iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}$;
 - iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x}$;
 - v) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x^2+x+1}{x^2+2})^{x^2}$;
 - vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x \cos 2x \dots \cos nx}{x^2}$, unde $n \in \mathbb{N}$.
12. Să se studieze continuitatea în 0 a următoarelor funcții $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
 - i) $f(x) = [x]$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
 - ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & x \neq 0 \\ e, & x = 0 \end{cases}$;
 - iii) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$.
13. Să se afle constantele $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{a+x}-1}{x}, & x > 0 \\ 2x+b, & x \leq 0 \end{cases}$ să fie continuă.

14. Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{Q} \\ g(x), & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ și $x_0 \in \mathbb{R}$. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

i) h este continuă în x_0 ;

ii) $f(x_0) = g(x_0)$.

15. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $|f(x) - x| \leq x^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că f este continuă în 0.

16. Să se studieze derivabilitatea următoarelor funcții $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

i) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$;

ii) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < \frac{\pi}{4} \\ -\cos x, & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$;

iii) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$, unde a și b sunt parametri reali.

17. Să se calculeze derivata funcției $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(x) = (1+x)^{\cos x}$ pentru orice $x \in (-1, \infty)$.

18. Fie $a, b > 0$. Atunci $a^x + b^x \geq 2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $b = \frac{1}{a}$.

19. Să se determine numărul și poziționarea rădăcinilor ecuației:

i) $x^3 - 12x + 1 = 0$;

ii) $x^2 = 2 \ln x + 10$;

iii) $3x^5 - 25x^3 + 60x + m = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$.

20. Să se determine punctele de extrem ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de:

i) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

ii) $f(x) = e^{x^3-3x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

21. Să se demonstreze că $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pentru orice $x \in [-1, 1]$.

22. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{\sin^3 x}$.

23. Să se calculeze:

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+\sin x} dx$;

ii) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$;

iii) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.

$$\text{iv)} \int_1^e \ln x dx;$$

$$\text{v)} \int_0^1 x e^{-x} dx;$$

$$\text{vi)} \int_0^1 \arctg x dx;$$

$$\text{vii)} \int_0^1 x \cdot \arctg x dx;$$

$$\text{vii)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx.$$

24. Să se studieze convergența simplă și uniformă pentru șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, în următoarele situații:

i) $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este dată de $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [0, \infty)$;

ii) $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este dată de $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [a, b]$, unde $0 < a < b$.

25. Să se studieze convergența simplă și uniformă pentru șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, în următoarele situații:

i) $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ și

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [-1, 1]$.

ii) $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ și

$$f_n(x) = x^n(1 - x^n),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [-1, 1]$.

II. ALGEBRĂ

1. Subspații vectoriale. Operații cu subspații vectoriale.
2. Baza și dimensiunea unui spațiu vectorial. Teorema Grassmann.
3. Vectori și valori proprii. Diagonalizare.
4. Subgrupuri. Teorema Cayley. Teorema Lagrange pentru grupuri.
5. Ideale într-un inel, Teoreme de izomorfism pentru inele.

Bibliografie minimală:

- [1.] M.Tarnauceanu, Structuri algebrice fundamentale, Edit. Matrix Rom, 2024
- [2.] D.Savin, M. Stefanescu, Lectii de aritmetica si teoria numerelor, Edit. Matrix Rom, 2008.
- [3.] A.L. Manea, 9Lecții de Algebră, Edit. Univ. Transilvania Brașov, 2013.
- [4.] I. Purdea, C.Pelea, Probleme de Algebră, Edit. Eikon, 2008
- [5.] E. Stoica, M.A.P. Purcaru, N. Brînzei, Linear Algebra, Analytic Geometry, Differential Geometry, Edit. Univ. Transilvania Brașov, 2008.

Algebră

1. Subspații vectoriale. Operații cu subspații vectoriale
2. Bază și dimensiune. Teorema Grassmann
3. Vectori și valori proprii. Diagonalizare
4. Subgrupuri. Teorema Cayley. Teorema Lagrange pentru grupuri
5. Ideale într-un inel. Teoreme de izomorfism pentru inele

1 Subspații vectoriale. Operații cu subspații vectoriale

Se consideră: V o mulțime ale cărei elemente se numesc *vectori*, (notate cu $x, y, z, \dots$), $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ cu elementele notate $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, numite *scalari* (spre exemplu K poate fi $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) și legile de compoziție: *adunarea vectorilor* $+: V \times V \rightarrow V$ și *amplificarea cu scalari a vectorilor* $\cdot: K \times V \rightarrow V$.

Definiția 1.1. *Tripletul $(V, +, \cdot)$ se numește spațiu vectorial peste corpul K sau K -spațiu vectorial (scris simplu V) dacă $(V, +)$ este grup abelian, iar $\cdot$ (fără a scrie explicit $\cdot$ în operații) satisface axiomele amplificării cu scalari:*

- i) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall \alpha, \beta \in K \text{ și } \forall x \in V$;
- ii) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall \alpha \in K \text{ și } \forall x, y \in V$;
- iii) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall \alpha, \beta \in K \text{ și } \forall x \in V$;
- iv) $1x = x, \forall x \in V$, unde $1 \in K$.

Definiția 1.2. *O mulțime nevidă $S \subset V$ se numește subspațiu vectorial al K -spațiului vectorial V (se notează $S \prec V$) dacă operațiile din V restricționate la S definesc pe S o structură de spațiu vectorial.*

Teorema 1.1. *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- i) S este subspațiu vectorial al lui V ;
- ii) $\forall x, y \in S, x + y \in S \text{ și } \forall \alpha \in K, \alpha x \in S$;
- iii) $\forall x, y \in S, \forall \alpha, \beta \in K, \alpha x + \beta y \in S$.

Observația 1.1. i) *Dacă $S \prec V$, atunci în particular este și subgrup în $(V, +)$, deci conține vectorul nul 0 . Așadar, orice submulțime a unui spațiu vectorial, care nu conține vectorul nul, nu este subspațiu vectorial.*

ii) $\{0\}$ și V sunt subspații în V ; $\{0\}$ se numește subspațiul nul al lui V . Orice subspațiu în V , diferit de $\{0\}$ și de V se numește subspațiu propriu.

Operații cu subspații vectoriale. Fie S_1, S_2 subspații vectoriale în V și următoarele submulțimi ale lui V :

$$S_1 \cap S_2, S_1 \cup S_2, S_1 + S_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}, S_1 \setminus S_2, S_2 \setminus S_1.$$

Observația 1.2. *Diferențele $S_1 \setminus S_2$ și $S_2 \setminus S_1$ nu sunt subspații vectoriale în V deoarece nu conțin vectorul nul 0 .*

Propoziția 1.1. *Intersecția $S_1 \cap S_2$ și suma $S_1 + S_2$ sunt subspații în V .*

Demonstrație. Verificăm condiția ii) din Teorema 1.1 pentru $S_1 \cap S_2$ și $S_1 + S_2$, respectiv.

Pentru $S_1 \cap S_2$. Fie $\alpha, \beta \in K$ și $x, y \in V_1 \cap V_2$, arbitrar alese. Deoarece S_1 și S_2 sunt subspații în V , conform Teoremei 1.1, ii) rezultă că $\alpha x + \beta y \in S_1$ și $\alpha x + \beta y \in S_2$. Deci, $\alpha x + \beta y \in S_1 \cap S_2$.

Pentru $S_1 + S_2$. Fie $\alpha, \beta \in K$ și $x, y \in S_1 + S_2$, arbitrar alese. Din definiția sumei $S_1 + S_2$, există $x_1, y_1 \in S_1$ și $x_2, y_2 \in S_2$ astfel încât $x = x_1 + x_2$ și $y = y_1 + y_2$. Atunci,

$$\alpha x + \beta y = \alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \beta y_1 + \beta y_2 = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2),$$

acesta fiind vector din $S_1 + S_2$ deoarece $\alpha x_1 + \beta y_1 \in S_1$ și $\alpha x_2 + \beta y_2 \in S_2$. $\square$

Observația 1.3. Scrierea vectorului $v = v_1 + v_2 \in S_1 + S_2$, cu $v_1 \in S_1$ și $v_2 \in S_2$ nu este unică în general. Într-adevăr, dacă $S_1 \cap S_2 \neq \{0\}$ atunci există $u \in S_1 \cap S_2$, $u \neq 0$, astfel încât

$$v = v_1 + v_2 = (v_1 + u) + (v_2 - u) = w_1 + w_2,$$

unde $w_1 = v_1 + u \in S_1$ și $w_2 = v_2 - u \in S_2$. Așadar, descompunerea $v = v_1 + v_2$ este unică dacă și numai dacă $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

Definiția 1.3. Subspațiul sumă $S_1 + S_2$ se numește subspațiul sumă directă, și se notează $S_1 \oplus S_2$, dacă $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

Observația 1.4. Noțiunile de sumă și sumă directă pot fi extinse la un număr finit de subspații vectoriale.

Fie $M \subset V$ o submulțime oarecare a lui V , $M \neq \emptyset$.

Definiția 1.4. Un vector $v \in V$ de forma

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, \quad \forall v_1, v_2, \dots, v_n \in M, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$$

se numește combinație liniară finită de elementele din M .

Propoziția 1.2. Mulțimea tuturor combinațiilor liniare finite de elemente din M împreună cu adunarea și amplificarea lor cu scalari este un subspațiu în V , numit subspațiul generat de M , notat cu $[M]$.

Observația 1.5. Elementele lui M se numesc generatorii subspațiului $[M]$.

Definiția 1.5. Fie $M \subset V$ o submulțime nevidă a lui V . M se numește sistem de generatori al K -spațiului vectorial V dacă subspațiul generat de M coincide cu V , adică $[M] = V$. Dacă M este mulțime finită, atunci V este finit generat.

Observația 1.6. Reuniunea a două subspații nu este în general, un subspațiu.

Spre exemplu, fie subspațiile vectoriale în $\mathbb{R}$ -spațiul vectorial $\mathbb{R}^2$:

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \text{ și } S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\},$$

Observăm că $(0, 1) \in S_1$, $(1, 0) \in S_2$ și mai mult, ambii vectori sunt în $S_1 \cup S_2$. Dacă $S_1 \cup S_2$ ar fi subspațiu vectorial, atunci suma $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1)$ ar trebui să aparțină reuniunii, deci să fie element în S_1 sau S_2 , adică să aibă fie prima componentă, fie a doua, nulă, ceea ce nu este adevărat. Deci $S_1 \cup S_2$ nu este subspațiu vectorial.

Propoziția 1.3. Fie S_1, S_2 subspații vectoriale în V . Subspațiul sumă $S_1 + S_2$ coincide cu subspațiul generat de $S_1 \cup S_2$, adică $[S_1 \cup S_2] = S_1 + S_2$.

2 Bază și dimensiune. Teorema Grassmann

Fie V un K -spațiu vectorial.

Definiția 2.1. Fie $M = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset V$ o mulțime (un sistem) de vectori din V . M se numește liniar independentă dacă oricare ar fi combinația liniară $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p$, $\alpha_i \in K$, $i = 1, 2, \dots, p$, egalitatea

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = 0 \quad (2.1)$$

are loc dacă și numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$.

Observația 2.1. În caz contrar, M se numește liniar dependentă. Adică, în ecuația (2.1), există cel puțin un $\alpha_k \neq 0$, ceea ce permite explicitarea lui v_k , adică exprimarea lui v_k printr-o combinație liniară de ceilalți vectori din sistem. Așadar, un sistem de vectori este liniar dependent dacă și numai dacă unul din vectori este o combinație liniară a celorlalți.

Observația 2.2. i) Mulțimea $\{0\}$ este liniar dependentă. Vectorul nul 0 nu face parte din niciun sistem de vectori liniar independent. Mai exact, orice sistem de vectori care conține 0 este liniar dependent.

ii) Dacă $v \in V$, $v \neq 0$, atunci $\{v\}$ este liniar independentă.

iii) O mulțime infinită de vectori din V este liniar independentă dacă orice parte finită din ea este liniar independentă.

iv) Dacă $M_1 \subset M_2$ și M_1 este liniar dependentă atunci M_2 este liniar dependentă;

v) Dacă $M_1 \subset M_2$ și M_2 este liniar independentă atunci M_1 este liniar independentă.

Definiția 2.2. Fie V un spațiu vectorial. Un sistem de vectori $\mathcal{B} \subset V$ se numește bază a spațiului vectorial V dacă:

i) $\mathcal{B}$ este liniar independent;

ii) $[\mathcal{B}] = V$.

Observația 2.3. i) În Definiția 2.2, condiția ii) atestă că orice vector $x \in V$ este o combinație liniară de elemente ale lui $\mathcal{B}$. Mai exact, dacă $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ există scalarii $x_1, \dots, x_n \in K$ astfel încât

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i. \quad (2.2)$$

Relația (2.2) se numește scrierea vectorului x în baza $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, iar scalarii $x_1, x_2, \dots, x_n$ se numesc componentele vectorului x în baza $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Propoziția 2.1. Componentele unui vector într-o bază sunt unice.

Propoziția 2.2. Fie V un spațiu vectorial finit generat. Dacă $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ și $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ sunt baze în V , atunci $n = m$.

Definiția 2.3. Numărul de vectori ai unei baze într-un spațiu vectorial V se numește dimensiunea spațiului, notată $\dim V$. Dimensiunea spațiului vectorial nul $\{0\}$ este 0, (în $\{0\}$ nu există bază).

Observația 2.4. Dacă V este generat de un sistem infinit de vectori atunci $\dim V = \infty$.

Schimbarea bazei. Fie K -spațiul vectorial V cu $\dim V = n$. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ și $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ baze în V . Atunci, fiecare vector $x \in V$ se scrie în mod unic în raport cu fiecare din cele două baze

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i. \quad (2.3)$$

Pe de altă parte, fiecare vector din $\mathcal{B}'$ se poate scrie în mod unic, ca o combinație liniară de vectori ai bazei $\mathcal{B}$,

$$e'_j = s_{1j}e_1 + s_{2j}e_2 + \dots + s_{nj}e_n = \sum_{i=1}^n s_{ij}e_i, \quad (2.4)$$

pentru fiecare $j = 1, 2, \dots, n$. Rezultă matricea inversabilă $S = (s_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ale cărei coloane sunt componentele vectorilor din $\mathcal{B}'$ în raport cu $\mathcal{B}$, numită *matricea schimbării de bază* în V , (*matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$*). Înlocuind (2.4) în (2.3) rezultă,

$$x = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n s_{ij} x'_j \right) e_i = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Deoarece scrierea într-o bază este unică, rezultă

$$x_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} x'_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

Dar, avem nevoie de scrierea inversă, x'_j exprimați în funcție de x_i . Dacă notăm cu X , respectiv cu X' coloanele componentelor vectorului x în $\mathcal{B}$, respectiv $\mathcal{B}'$, ($X, X' \in \mathcal{M}_{n \times 1}(K)$), atunci sistemul (2.5) se scrie matricial $X = SX'$, sau prin inversare $X' = S^{-1}X$, deoarece $\det S \neq 0$.

Teorema Grassmann. Fie V un K -spațiu vectorial. Menționăm următoarea proprietate, necesară pentru a demonstra teorema Grassmann.

Propoziția 2.3. Dacă V este finit generat, atunci orice sistem de vectori liniar independenți din V poate fi completat până la o bază în V .

Teorema 2.1. [Grassmann] Dacă S_1 și S_2 sunt două subspații finit generate în V , atunci

$$\dim S_1 + \dim S_2 = \dim(S_1 + S_2) + \dim(S_1 \cap S_2).$$

Demonstrație. Fie $\dim S_1 = s$ și $\dim S_2 = p$, $s, p \in \mathbb{N}^*$. Fie $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$, $r \in \mathbb{N}^*$, o bază în $S_1 \cap S_2 \subset S_1$. Conform Propoziției 2.3, sistemul de vectori liniar independenți $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ se poate completa la o bază $\mathcal{B}_1 = \{f_1, f_2, \dots, f_r, e_{r+1}, \dots, e_s\}$ în S_1 . Analog, se obține baza $\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, \dots, f_r, g_{r+1}, \dots, g_p\}$ pentru S_2 .

Se demonstrează că $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, \dots, f_r, e_{r+1}, \dots, e_s, g_{r+1}, \dots, g_s\}$ este o bază pentru $S_1 + S_2$:

Liniar independența lui $\mathcal{B}$. Fie combinația liniară nulă de vectori din $\mathcal{B}$

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i + \sum_{j=r+1}^s \beta_j e_j + \sum_{k=r+1}^p \gamma_k g_k = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i + \sum_{j=r+1}^s \beta_j e_j}_{\in S_1} = - \underbrace{\sum_{k=r+1}^p \gamma_k g_k}_{\in S_2} = v, \quad (2.6)$$

cu $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in K$, $i = 1, \dots, r$; $j = r+1, \dots, s$; $k = r+1, \dots, p$. Deoarece $v \in S_1$ și $v \in S_2$, rezultă că $v \in S_1 \cap S_2$. Deci, conform Propoziției 2.1 există în mod unic scalarii $\delta_i \in K$, $i = 1, \dots, r$, astfel încât $v = \sum_{i=1}^r \delta_i f_i$ care, împreună cu (2.6) conduce la

$$\begin{aligned} v &= - \sum_{k=r+1}^p \gamma_k g_k = \sum_{i=1}^r \delta_i f_i \Leftrightarrow \sum_{k=r+1}^p \gamma_k g_k + \sum_{i=1}^r \delta_i f_i = 0 \\ &\Leftrightarrow \gamma_{r+1} = \dots \gamma_{r+p} = \delta_1 = \dots = \delta_r = 0, \end{aligned}$$

Atunci,

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i + \sum_{i=r+1}^s \beta_i e_i = 0$$

și pentru că $\mathcal{B}_1$ este bază în S_1 , rezultă

$$\beta_{r+1} = \dots \beta_s = \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0,$$

deci $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, \dots, f_r, e_{r+1}, \dots, e_s, g_{r+1}, \dots, g_s\}$ este liniar independentă.

Sistem de generatori. Deoarece $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, $[\mathcal{B}_1] = S_1$ și $[\mathcal{B}_2] = S_2$ rezultă că

$$[\mathcal{B}] = [\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2] = [S_1 \cup S_2] = S_1 + S_2,$$

conform Propoziției 1.3. Deci $\mathcal{B}$ un sistem de generatori pentru $S_1 + S_2$, adică o bază pentru $S_1 + S_2$. Așadar, $\dim(S_1 + S_2) = s + p - r = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$. $\square$

Observația 2.5. Dacă $S_1 \cap S_2 = \{0\}$, adică $r = \dim S_1 \cap S_2 = 0$, atunci suma $S_1 + S_2$ este directă. Un raționament analog celui din demonstrația de mai sus cu $r = 0$ conduce la $\dim S_1 + \dim S_2 = \dim(S_1 \oplus S_2)$.

3 Vectori și valori proprii. Diagonalizare

Matricea unui transformări liniare. Fie V un K -spațiu vectorial și $T : V \rightarrow V$ o transformare liniară, (i.e., $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$, $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha, \beta \in K$). Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază în V . Atunci, fiecare vector $x \in V$ se scrie în mod unic în $\mathcal{B}$ sub forma $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Din liniaritatea lui T se obține că $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i T(e_i)$ și deci T este bine determinată dacă se cunosc vectorii

$$T(e_j) = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Se obține astfel o matrice $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ în care coloana j este dată de componentele lui $T(e_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, în baza $\mathcal{B}$, numită matricea lui T în baza $\mathcal{B}$.

Fie X matricea coloană a componentelor vectorului x în $\mathcal{B}$, ($X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(K)$). Atunci transformarea liniară T este exprimată prin matricea coloană $T(X) = Y \in \mathcal{M}_{n \times 1}(K)$, care verifică ecuația matriceală

$$Y = AX.$$

Observația 3.1. *i) Considerând $\mathcal{B}'$ o altă bază în V , atunci $Y' = T(X') = A'X'$, unde A' matricea lui T în baza $\mathcal{B}'$. Deoarece $X = SX'$ și analog $Y = SY'$, unde S este matricea de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$, ($\mathcal{B} \xrightarrow{S} \mathcal{B}'$), înlocuite în $Y = AX$ conduc la relația dintre A și A' ,*

$$A' = S^{-1}AS. \quad (3.7)$$

ii) Oricărei transformări liniare $T : V \rightarrow V$ i se poate asocia o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(K)$ într-o anumită bază a lui V și reciproc oricărei matrice pătratice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ i se poate asocia o transformare liniară pe un K -spațiu vectorial finit generat.

Vectori și valori proprii. Fie V un K -spațiu vectorial și $T : V \rightarrow V$ o transformare liniară.

Definiția 3.1. *Un vector $x \in V$, $x \neq 0$, se numește vector propriu pentru T dacă există scalarul $\lambda \in K$ astfel încât*

$$T(x) = \lambda x. \quad (3.8)$$

Scalarul λ se numește valoare proprie corespunzătoare vectorului propriu x .

Observația 3.2. *i) Se observă că vectorul nul 0 verifică (3.8) din Definiția 3.1, pentru orice scalar $\lambda \in K$.*

ii) Pentru o valoare proprie λ se poate vorbi nu numai de un vector propriu x corespunzător lui λ , ci de o mulțime care conține vectori proprii pentru T , (notată S_λ) și anume

$$S_\lambda = \{x \in V \mid T(x) = \lambda x\},$$

numită subspațiu propriu. Subliniem faptul că $0 \in S_\lambda$.

iii) S_λ este subspațiu în V și este invariant în raport cu T , adică pentru orice $x \in S_\lambda$, $T(x) \in S_\lambda$.

Propoziția 3.1. Fie $T : V \rightarrow V$ o transformare liniară. Sunt adevărate următoarele afirmații:

- i) Unui vector propriu pentru T îi corespunde o unică valoare proprie.
- ii) Vectorii proprii pentru T , corespunzători valorilor proprii distincte sunt liniar independenți.
- iii) Subspațiile proprii corespunzătoare valorilor proprii distincte au în comun doar vectorul nul.

Demonstrație. i) Presupunem că vectorului propriu $x \in V$, $x \neq 0$, îi corespund două valori proprii $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Atunci, $T(x) = \lambda_1 x$ și $T(x) = \lambda_2 x$, ceea ce implică $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$. Deoarece $x \neq 0$, rezultă că $\lambda_1 = \lambda_2$.

ii) Demonstrăm doar pentru doi vectori proprii x și y pentru T . Fie λ_1 și λ_2 două valori proprii distincte ce corespund respectiv, vectorilor proprii x și y , ($x \in S_{\lambda_1}$, $y \in S_{\lambda_2}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$).

Studiem liniar independența vectori proprii x și y . Fie $\alpha, \beta \in K$ astfel încât $\alpha x + \beta y = 0$. Atunci, $\alpha T(x) + \beta T(y) = T(\alpha x + \beta y) = T(0) = 0$, ceea ce implică $\alpha \lambda_1 x + \beta \lambda_2 y = 0$. Obținem următorul sistem liniar omogen ale cărui necunoscute sunt vectorii x și y ,

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y &= 0 \\ \alpha \lambda_1 x + \beta \lambda_2 y &= 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Deoarece $x \neq 0$ și $y \neq 0$, determinantul matricei asociate sistemului (3.9) trebuie să fie nul (scalarul nul 0), adică $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha \lambda_1 & \beta \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$, ceea ce conduce la $\alpha \beta (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$. Deoarece $\lambda_1 \neq \lambda_2$ rezultă $\alpha \beta = 0$, adică $\alpha = 0$ sau $\beta = 0$. Dacă $\alpha = 0$, atunci din prima ecuație a sistemului (3.9) rezultă $\beta y = 0$. Deoarece $y \neq 0$, rezultă $\beta = 0$. Analog, dacă $\beta = 0$ rezultă $\alpha = 0$. Așadar, vectorii x și y sunt liniar independenți.

iii) Fie subspațiile proprii S_{λ_1} și S_{λ_2} , cu $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ și $x \in S_{\lambda_1} \cap S_{\lambda_2}$. Atunci, $T(x) = \lambda_1 x$ și $T(x) = \lambda_2 x$ ceea ce conduce la $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$. Deoarece $\lambda_1 \neq \lambda_2$, rezultă $x = 0$. $\square$

Fie $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază a K - spațiului vectorial V , ($\dim V = n$), și A matricea lui T în baza $\mathcal{B}$. Scriind matriceal condiția $T(x) = \lambda x$ rezultă, $AX = \lambda X$. Se obține sistemul liniar omogen

$$(A - \lambda I_n)X = \mathbf{0},$$

(unde $\mathbf{0}$ este notație pentru matrice coloană nulă, $\mathbf{0}_{n \times 1}$) care are o infinitate de soluții nenule deoarece $X \neq \mathbf{0}$. Atunci, trebuie ca

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Observația 3.3. i) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ este un polinom de grad n în λ numit polinom caracteristic al matricei A , iar ecuația $p(\lambda) = 0$, (sau $\det(A - \lambda I_n) = 0$), se numește ecuația caracteristică a matricei A .

- ii) Printre cele n rădăcini ale ecuației $p(\lambda) = 0$ se găsesc și valorile proprii ale lui T . Așadar, T are cel mult n valori proprii (distincte sau multiple). Dacă $K = \mathbb{C}$ atunci are exact n valori proprii, dar dacă $K = \mathbb{R}$ atunci vor fi cel mult n .
- iii) Rezolvând sistemul $(A - \lambda I_n)X = \mathbf{O}$ pentru aceste valori proprii, se obțin vectorii proprii corespunzători și implicit, subspațiile proprii.
- iv) Vectorii și subspațiile proprii ale lui T sunt aceleași, indiferent de baza aleasă în V .

Diagonalizare. Fie V un K -spațiu vectorial ($\dim V = n$) și $T : V \rightarrow V$ o transformare liniară.

Definiția 3.2. Transformarea liniară T se numește diagonalizabilă dacă există o bază în V astfel încât matricea lui T în această bază să aibă formă diagonală, adică singurele elemente nenule să se afle pe diagonala principală.

Teorema 3.1. Transformarea liniară T este diagonalizabilă dacă și numai dacă toate valorile proprii ale lui T sunt din K și ordinul de multiplicitate al fiecărei valori proprii λ (numită multiplicitate algebrică a lui λ , notată m_λ), ca rădăcină a ecuației caracteristice, coincide cu dimensiunea spațiului S_λ , (numită multiplicitate geometrică a lui λ , notată p_λ , $p_\lambda = \dim S_\lambda$). Baza în care T admite această formă diagonală este reuniunea bazelor subspațiilor proprii S_λ .

Observația 3.4. Faptul că T este diagonalizabilă este echivalent cu a spune că matricea A a lui T în raport cu baza canonică din V este diagonalizabilă.

Algoritmul de diagonalizare

- P1.** Se fixează o bază $\mathcal{B}$ în K -spațiul vectorial V (preferabil baza canonică a lui V) și se calculează matricea A a lui T în raport cu $\mathcal{B}$;
- P2.** Se determină valorile proprii λ_j , $j = \overline{1, p}$, (i.e., rădăcinile ecuației caracteristice $\det(A - \lambda I) = 0$) și se verifică dacă $\lambda_j \in K$, $\forall j = \overline{1, p}$.
Dacă da, atunci se trece la pasul **P3**. Dacă nu, atunci T nu este diagonalizabil;
- P3.** Se stabilește ordinul de multiplicitate m_{λ_j} pentru fiecare valoare proprie λ_j , $j = \overline{1, p}$;
- P4.** Se determină: subspațiile proprii S_{λ_j} , câte o bază $\mathcal{B}_{S_{\lambda_j}}$ pentru fiecare S_{λ_j} și $p_{\lambda_j} = \dim S_{\lambda_j}$, $j = \overline{1, p}$.
Dacă $m_{\lambda_j} = p_{\lambda_j}$, pentru orice $j = \overline{1, p}$, se trece la pasul **P5**. Dacă nu, atunci T nu este diagonalizabil;
- P5.** Se scrie matricea diagonală A' care are pe diagonala principală valorile proprii λ_j , fiecare fiind scrisă de m_{λ_j} ori. Restul elementelor matricei A' sunt zerouri. Se scrie baza $\mathcal{B}' = \cup_{j=1}^p \mathcal{B}_{S_{\lambda_j}}$. A' este matricea lui T în $\mathcal{B}'$.

4 Subgrup. Teorema Cayley. Teorema Lagrange

Considerăm cunoscute noțiunile de relație de echivalență pe o mulțime, grup, morfism de grupuri, nucleul unui morfism.

Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e și H o submulțime nevidă a mulțimii G .

Definiția 4.1. *Submulțimea H se numește subgrup al lui G dacă legea $\cdot$ este lege de compoziție pe H și $(H, \cdot)$ este grup. Subgrupul H se numește normal dacă $x \cdot H = H \cdot x$, pentru orice $x \in G$, unde*

$$x \cdot H = \{x \cdot h \mid h \in H\}, \quad H \cdot x = \{h \cdot x \mid h \in H\}.$$

Notăm cu $H \leq G$ faptul că H este subgrup al lui G . Dacă H este subgrup normal, scriem $H \triangleleft G$.

Propoziția 4.1. *Fie H o submulțime a grupului $(G, \cdot)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- a) H este subgrup al grupului $(G, \cdot)$.
- b) $e \in H$, $(H, \cdot)$ este parte stabilă, adică $(\forall)x, y \in H, x \cdot y \in H$ și $(\forall)x \in G, x^{-1} \in H$.
- c) H nevidă și $(\forall)x, y \in H, x \cdot y^{-1} \in H$.

Exemplul 4.1. a) Dacă $(G, \cdot)$ este grup, atunci $\{e\}, G$ sunt subgrupuri, numite improprii, ale lui G . Orice alt subgrup se numește propriu. Subgrupurile improprii sunt în mod evident normale.

b) Dacă grupul este abelian, atunci orice subgrup al său este normal.

c) În grupul permutărilor $(S_3, \circ)$, submulțimea $H = \{e, (12)\}$ este subgrup care nu este normal. Într-adevăr, pentru $\sigma = (123) \in S_3$, avem $\sigma \circ H = \{(123), (13)\}$, $H \circ \sigma = \{(123), (23)\}$, deci sunt diferite. Submulțimea $H' = \{e, (123), (132)\}$ este subgrup normal al grupului $(S_3, \circ)$.

Propoziția 4.2. *În orice grup $(G, \cdot)$, mulțimea $Z(G) = \{x \in G \mid x \cdot y = y \cdot x, (\forall)y \in G\}$ este subgrup normal al grupului G . Acest grup este numit centrul grupului G .*

Demonstrație: Evident, elementul neutru al grupului este element în $Z(G)$.

Oricare ar fi $a, b \in Z(G)$, știm $a \cdot x = x \cdot a, b \cdot x = x \cdot b, (\forall)x \in G$. Atunci

$(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) = a \cdot (x \cdot b) = (a \cdot x) \cdot b = (x \cdot a) \cdot b = x \cdot (a \cdot b)$, deci $a \cdot b \in Z(G) \Rightarrow (Z(G), \cdot)$ este parte stabilă.

Fie $a \in Z(G)$, arbitrar ales. Știm $a \cdot x = x \cdot a$ pentru oricare $x \in G$. Compunem succesiv relația anterioară cu a^{-1} , la stânga și la dreapta și obținem $x \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot x$, pentru $(\forall)x \in G$. Deci $a^{-1} \in Z(G)$.

Cele trei condiții din caracterizarea subgrupului (Propoziția 4.1b) fiind verificate, rezultă $Z(G)$ subgrup în G . Mai mult, grupul $(Z(G), \cdot)$ este abelian.

Avem și: $(\forall)g \in G, gZ(G) = \{g \cdot a \mid a \in Z(G)\} = \{a \cdot g \mid a \in Z(G)\} = Z(G)g$, deci $Z(G)$ este subgrup normal al grupului G . $\square$

Propoziția 4.3. Fie $f : (G, +) \rightarrow (G', \cdot)$ un morfism de grupuri. Nucleul său este subgrup normal al domeniului de definiție, iar imaginea sa este subgrup (nu neapărat normal) al codomeniului.

Demonstrație: Notăm cu 0, respectiv 1, elementele neutre din domeniu, respectiv codomeniu. Verificăm condițiile c) din Propoziția 4.1 pentru nucleul morfismului f ,

$Ker(f) = \{x \in G \mid f(x) = 1\}$. Deoarece f este morfism de grupuri, avem $f(0) = 1$, de unde $0 \in Ker(f)$, deci $Ker(f)$ nevidă.

Fie acum $x, y \in Ker(f)$, deci $f(x) = f(y) = 1$, și calculăm

$f(x - y) = f(x) \cdot f(-y) = f(x) \cdot (f(y))^{-1} = 1 \cdot 1 = 1$, de unde $x - y \in Ker(f)$. Am obținut $Ker(f) \leq G$.

Mai trebuie demonstrat $y + Ker(f) = Ker(f) + y$, pentru $(\forall)y \in G$. Au loc echivalențele: $z \in y + Ker(f) \Leftrightarrow (\exists)x \in Ker(f), z = y + x \Leftrightarrow f(z) = f(y) \Leftrightarrow f(z) \cdot (f(y))^{-1} = 1 \Leftrightarrow z - y \in Ker(f) \Leftrightarrow (\exists)h \in Ker(f), z = h + y \in Ker(f) + y$, adică $y + Ker(f) = Ker(f) + y$, pentru $(\forall)y \in G$. Rezultă că subgrupul $Ker(f)$ este subgrup normal al grupului $(G, +)$.

Analog pentru $Im(f)$, deoarece $f(0) = 1$ rezultă $Im(f)$ nevidă. Fie $y_1, y_2 \in Im(f)$, deci există $x_1, x_2 \in G$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Calculăm $y_1 \cdot (y_2)^{-1} = f(x_1) \cdot f(-x_2) = f(x_1 - x_2) \in Im(f)$. Rezultă că $Im(f)$ este subgrup al grupului $(G', \cdot)$. $\square$

Teorema 4.1. [Cayley] Orice grup este izomorf cu un grup de permutări al său. Mai exact, dacă $(G, \cdot)$ este un grup și $(S(G), \circ)$ grupul său de permutări, atunci G este izomorf cu un subgrup al lui $S(G)$.

Demonstrație: Fie funcția $\Psi : G \rightarrow S(G)$, $\Psi(x) = \psi_x$, unde

$\psi_x : G \rightarrow G$, $\psi_x(g) = x \cdot g$. Se arată că Ψ este corect definită, adică pentru orice $x \in G$, ψ_x este bijecție. Funcția Ψ este morfism de grupuri:

$$\begin{aligned} \Psi(x \cdot y)(g) &= \psi_{x \cdot y}(g) = (x \cdot y) \cdot g = x \cdot (y \cdot g) = \psi_x(y \cdot g) = \psi_x(\psi_y(g)) = \\ &= (\psi_x \circ \psi_y)(g), \quad (\forall)g \in G, (\forall)x, y \in G. \end{aligned}$$

Mai mult, morfismul este injectiv deoarece nucleul să conține un singur element:

$$\begin{aligned} Ker(\Psi) &= \{x \in G \mid \Psi(x) = \mathbf{1}_G\} = \{x \in G \mid \psi_x(g) = g, (\forall)g \in G\} = \\ &= \{x \in G \mid x \cdot g = g, (\forall)g \in G\} = \{1\}. \end{aligned}$$

Morfismul injectiv Ψ arată că grupul $(G, \cdot)$ este izomorf cu $(Im(\Psi), \circ)$, care este subgrup al grupului de permutări $(S(G), \circ)$. $\square$

Fie $(G, +)$ un grup și H un subgrup al său. Definim relațiile de congruență modulo H la stânga, $\equiv_s$, respectiv la dreapta $\equiv_d$, prin:

$$x, y \in G, \quad x \equiv_s y(mod H) \Leftrightarrow -x + y \in H,$$

$$x, y \in G, \quad x \equiv_d y(mod H) \Leftrightarrow x - y \in H.$$

Propoziția 4.4. *Cele două relații definite mai sus sunt relații de echivalență.*

Demonstrație: Vom arăta că relația de congruență modulo H la stânga este o relație de echivalență, demonstrația fiind analoagă și pentru relația de congruență modulo H la dreapta.

1. reflexivitatea: $-x + x = 0 \in H, (\forall)x \in G \Rightarrow x \equiv_s x(\text{mod}H), (\forall)x \in G$.
2. simetria: $x \equiv_s y(\text{mod}H) \Leftrightarrow -x + y \in H \Rightarrow -(-x + y) \in H \Rightarrow -y + x \in H \Rightarrow y \equiv_s x(\text{mod}H)$.
3. tranzitivitatea: $x \equiv_s y(\text{mod}H), y \equiv_s z(\text{mod}H) \Rightarrow -x + y, -y + z \in H \Rightarrow (-x + y) + (-y + z) = -x + z \in H \Rightarrow x \equiv_s z(\text{mod}H)$. □

Clasa de echivalență a elementului $x \in G$ în raport cu $\equiv_s$, numită și clasa de echivalență la stânga a elementului x , este mulțimea

$$\hat{x} = \{y \in G \mid x \equiv_s y(\text{mod}H)\} = \{y \in G \mid -x + y \in H\} = \{y \in G \mid y \in x + H\} = x + H,$$

iar în raport cu $\equiv_d$ este mulțimea $H + x$. Mulțimile cât (mulțimile claselor de echivalență) relativ la cele două relații de echivalență sunt:

$$(G/H)_s = \{x + H \mid x \in G\}, \quad (G/H)_d = \{H + x \mid x \in G\}.$$

Observația 4.1. *Dacă H este subgrup normal al grupului G , atunci cele două mulțimi cât coincid, ca o consecință directă a definiției subgrupului normal.*

Propoziția 4.5. *Mulțimile cât (numite și factor) $(G/H)_s$ și $(G/H)_d$ sunt echipotente.*

Definiția 4.2. *Cardinalul mulțimii cât $(G/H)_s$ se numește indicele subgrupului H în G și se notează $|G : H|$.*

Exemplul 4.2. *Indicele subgrupului $H = \{\hat{0}, \hat{3}, \hat{6}, \hat{9}\} \subseteq \mathbb{Z}_{12}$ este 3 deoarece mulțimea cât $(\mathbb{Z}_{12}/H)_s$ are trei elemente: $\hat{0} + H = H = \hat{3} + H = \hat{6} + H = \hat{9} + H$,*

$$\hat{1} + H = \{\hat{1}, \hat{4}, \hat{7}, \hat{10}\} = \hat{4} + H = \hat{7} + H = \hat{10} + H,$$

$$\hat{2} + H = \{\hat{2}, \hat{5}, \hat{8}, \hat{11}\} = \hat{5} + H = \hat{8} + H = \hat{11} + H.$$

Teorema 4.2. *[Lagrange] Dacă H este un subgrup al grupului G , atunci*

$$|G| = |H| \cdot |G : H|.$$

Demonstrație: Fie $H \leq G$. Folosind faptul că o relație de echivalență determină o partiție a mulțimii pe care este definită, atunci conform Propoziției 4.4, $\equiv_s$ determină partiția lui G în clasele din $(G/H)_s$, mai exact G este reuniunea disjunctă a elementelor mulțimii factor $(G/H)_s$. Cum această mulțime are $|G : H|$ elemente, iar fiecare element este o mulțime de forma $x + H$, deci echipotentă cu H , obținem rezultatul dorit. □

O consecință imediată a teoremei lui Lagrange este:

Propoziția 4.6. *Dacă G este un grup finit, atunci ordinul oricărui subgrup al său este divizor al ordinului grupului.*

5 Ideale într-un inel. Teoreme de izomorfism pentru inele

Considerăm cunoscute noțiunile de inel, subinel, corp, morfisme de inele și corpuri.

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu elementele neutre 0, respectiv 1, și I o submulțime nevidă a sa.

Definiția 5.1. I se numește ideal la stânga (la dreapta) al lui A dacă $0 \in I$, $x + y \in I$ și $a \cdot x \in I$ (respectiv $x \cdot a \in I$), $(\forall)x, y \in I$ și $(\forall)a \in A$. O submulțime care este ideal la stânga și la dreapta se numește ideal bilateral, sau, mai simplu, ideal.

Observația 5.1. a) Orice ideal la stânga (dreapta) al unui inel comutativ este ideal bilateral.

b) Orice ideal este subinel. Reciproc nu este adevărat, nu orice subinel este și ideal: subinelul $\mathbb{Z}$ al lui $\mathbb{Q}$ nu este ideal, deoarece, de exemplu $\frac{2}{3} \cdot 5 \notin \mathbb{Z}$.

Exemplul 5.1. a) În orice inel $(A, +, \cdot)$, $\{0\}$, A sunt ideale, numite idealul nul, respectiv idealul total. Acestea sunt idealele improprii ale inelului; oricare alte ideale se numesc ideale proprii.

b) Fie $x \in A$, arbitrar ales. Mulțimile $x \cdot A = \{x \cdot a, a \in A\}$, $A \cdot x = \{a \cdot x, a \in A\}$, sunt ideale la dreapta, respectiv la stânga, ale inelului A .

Propoziția 5.1. Inelul $(A, +, \cdot)$ este corp, dacă și numai dacă singurele sale ideale sunt cel nul și cel total, sau, altfel spus, cele trei mulțimi de ideale ale sale coincid cu $\{\{0\}, A\}$.

Proprietățile următoare, afirmate pentru ideale la stânga, se mențin adevărate și în cazul idealelor la dreapta sau al celor bilaterale. Notăm cu $Id_s(A)$ mulțimea idealelor la stânga ale inelului A .

Propoziția 5.2. Fie A un inel unitar, $U(A)$ mulțimea elementelor inversabile în A și I un ideal la stânga. Următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) $I = A$ dacă și numai dacă $1 \in I$.
- b) $I = A$ dacă și numai dacă $U(A) \cap I$ nevidă.

Demonstrație: Implicația directă este evidentă la ambele afirmații.

a) Pentru reciprocă, fie $a \in A$, arbitrar ales. Din definiția idealului, ipoteza $1 \in I$ conduce la $a \cdot 1 \in I$, deci $A \subset I$. Rezultă $A = I$.

b) Dacă I conține un inversabil a , inversul său este un element $a^{-1} \in A$, iar rezultatul $a^{-1} \cdot a$ este în I . Obținem $1 \in I$ și, conform a), $I = A$. $\square$

Propoziția 5.3. Intersecția unei familii de ideale la stânga este ideal la stânga. Mai mult, este cel mai mare (în sensul incluziunii) ideal la stânga inclus în fiecare ideal din familia dată.

Demonstrație: Fie $\{I_i\}_{i \in K}$ o familie de ideale la stânga ale inelului A , unde K este o mulțime de indici. Notăm $I = \bigcap_{i \in K} I_i$. Deoarece fiecare I_i este ideal, avem $0 \in I_i$, deci $0 \in I$.

Fie $a \in A$ și $x, y \in I$, deci $x, y \in I_i, (\forall) i \in K$. Pentru fiecare $i \in K$, rezultă $x + y \in I_i$ și $a \cdot x \in I_i$ din definiția idealului (I_i ideal), de unde avem $x + y, a \cdot x \in I$.

Evident I este inclus în fiecare I_i . Fie acum J un alt ideal la stânga al inelului A astfel încât $J \subseteq I_i, (\forall) i \in K$. Rezultă $J \subseteq I$, deci I este infimumul familiei de ideale $\{I_i\}_{i \in K}$ în mulțimea parțial ordonată $(Id_s(A), \subseteq)$. $\square$

Propoziția 5.4. *Dacă $I, J \in Id_s(A)$, atunci $I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$, este ideal la stânga al lui A , numit suma idealelor I și J . Mai mult, este cel mai mic (în sensul incluziunii) ideal din $Id_s(A)$ care include I și J .*

Demonstrație: Deoarece I și J sunt ideale, ele conțin elementul zero al inelului, iar din $0 = 0 + 0$, avem $0 \in I + J$.

Fie $z_1, z_2 \in I + J$, arbitrar alese. Există $x_1, x_2 \in I$ și $y_1, y_2 \in J$ astfel încât $z_1 = x_1 + y_1$, $z_2 = x_2 + y_2$. Obținem $z_1 + z_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \in I + J$, $a \cdot z_1 = a \cdot (x_1 + y_1) = a \cdot x_1 + a \cdot y_1 \in I + J$, din faptul că I, J sunt ideale la stânga. Am obținut astfel că $I + J$ satisface axiomele idealului la stânga.

Evident, $I = \{x + 0 \mid x \in I\} \subset I + J$, $J = \{0 + y \mid y \in J\} \subset I + J$, deci $I + J$ este majorant pentru $\{I, J\}$ în $(Id_s(A), \subseteq)$. A rămas să arătăm că $I + J$ este cel mai mic ideal la stânga care include I și J .

Fie $K \in Id_s(A)$, $I \subset K$, $J \subset K$. Pentru orice $z \in I + J$, există $x \in I$, $y \in J$ astfel încât $z = x + y$. Dar $x \in I$, $y \in J$ implică $x, y \in K$ și, deoarece K este ideal, avem $x + y \in K$, de unde $z \in K$, deci $I + J \subset K$. Am obținut că $I + J$ este supremumul mulțimii $\{I, J\}$ în mulțimea parțial ordonată $(Id_s(A), \subseteq)$. $\square$

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și I un ideal bilateral al său. Un astfel de ideal există întotdeauna: $\{0\}$, sau A , sau nucleul unui morfism cu domeniul de definiție A .

Din definiția idealului, grupul $(I, +)$ este subgrup normal în grupul abelian $(A, +)$, deci există grupul factor $(A/I, +)$, unde $A/I = \{x + I \mid x \in A\}$,

$x + I = \{y \in A \mid y - x \in I\} = \{x + a \mid a \in I\}$. Adunarea elementelor din mulțimea factor A/I este definită prin $(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$ și dă acestei mulțimi structură de grup, cu elementul neutru I .

Definim pe această mulțime o operație notată multiplicativ: $(x + I) \cdot (y + I) = (x \cdot y) + I$, folosind înmulțirea din inelul A .

Propoziția 5.5. *Operația multiplicativă definită mai sus nu depinde de reprezentanți și $(A/I, +, \cdot)$ este inel, numit inelul factor al inelului A prin idealul I .*

Demonstrație: Arătăm că $\cdot$ este corect definită, adică nu depinde de reprezentanți. Fie $x' \in x + I$ și $y' \in y + I$, deci $x' - x, y' - y \in I$. Calculăm $x' \cdot y' - x \cdot y = x' \cdot y' - x' \cdot y + x' \cdot y - x \cdot y = x' \cdot (y' - y) + (x' - x) \cdot y$, care este un element din I , deoarece I este ideal. Deci $x \cdot y$ este congruent modulo I cu $x' \cdot y'$, rezultatul calculului $(x + I) \cdot (y + I)$ este același cu $(x' + I) \cdot (y' + I)$.

Operația $\cdot$ pe A/I dă grupului $(A/I, +)$ structură de inel. Pentru orice elemente $x + I, y + I, z + I$ din A/I , au loc: $[(x + I) \cdot (y + I)] \cdot (z + I) = [(x \cdot y) + I] \cdot (z + I) = [(x \cdot y) \cdot z] + I =$

$= [x \cdot (y \cdot z)] + I = (x + I) \cdot [(y + I) \cdot (z + I)]$, din asociativitatea înmulțirii în A , deci $\cdot$ este asociativă în A/I .

Dacă A este inel unitar, atunci $(1 + I) \cdot (x + I) = x + I = (x + I) \cdot (1 + I)$, unde 1 este elementul unitate în A , deci $1 + I$ este element neutru la înmulțirea din A/I .

$$\begin{aligned} [(x + I) + (y + I)] \cdot (z + I) &= [(x + y) + I] \cdot (z + I) = [(x + y) \cdot z] + I = (x \cdot z + y \cdot z) + I = \\ &= [(x \cdot z) + I] + [(y \cdot z) + I] = (x + I) \cdot (z + I) + (y + I) \cdot (z + I), \end{aligned}$$

din distributivitatea operației $\cdot$ față de $+$ în inelul A și din definițiile operațiilor în A/I . Analog se verifică distributivitatea la stânga. Toate axiomele inelului fiind verificate, $(A/I, +, \cdot)$ este inel. $\square$

Observația 5.2. a) Dacă inelul A este comutativ, atunci și inelul factor este comutativ.

b) Aplicația $\pi : A \rightarrow A/I$ definită prin $\pi(x) = x + I$, $(\forall)x + I \in A/I$, este morfism surjectiv de inele, numit surjecția canonică.

Teorema 5.1. [Teorema fundamentală de izomorfism pentru inele]

Fie $f : (A, +, \cdot) \rightarrow (B, +, \cdot)$ un morfism de inele. Inelul factor $A/\text{Ker} f$ este izomorf cu subinelul $\text{Im} f$ al lui B .

Demonstrație: Funcția $\varphi : A/\text{Ker} f \rightarrow \text{Im} f$ definită prin $\varphi(x + \text{Ker} f) = f(x)$, $(\forall)x \in A$, este corect definită (adică nu depinde de reprezentanți) și este evident surjectivă. Aceasta verifică $\varphi((x + \text{Ker} f) + (y + \text{Ker} f)) = \varphi((x + y) + \text{Ker} f) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \varphi(x + \text{Ker} f) + \varphi(y + \text{Ker} f)$, și $\varphi((x + \text{Ker} f) \cdot (y + \text{Ker} f)) = \varphi((x \cdot y) + \text{Ker} f) = f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) = \varphi(x + \text{Ker} f) \cdot \varphi(y + \text{Ker} f)$, $(\forall)x, y \in A$, deci φ este morfism surjectiv de inele. Mai mult, $\text{Ker}(\varphi) = \{\text{Ker} f\}$ deci este și injectivă, ceea ce încheie demonstrația. $\square$

Teorema 5.2. [Prima teoremă de izomorfism pentru inele]

Fie morfismul surjectiv de inele $f : (A, +, \cdot) \rightarrow (B, +, \cdot)$ și I un ideal bilateral al lui A care include $\text{Ker} f$. Inelele factor A/I și $B/f(I)$ sunt izomorfe.

Demonstrație: Definim funcția $\zeta : A \rightarrow B/f(I)$, prin $\zeta(x) = (\pi \circ f)(x) = f(x) + f(I)$, unde π este surjecția canonică a inelului factor $B/f(I)$, adică ζ asociază fiecărui element din A clasa de echivalență din $B/f(I)$ a imaginii sale prin f . Deoarece f și π sunt ambele morfisme surjective, la fel este și ζ . Deoarece $\text{Ker} f \subseteq I$, determinăm

$$\begin{aligned} \text{Ker} \zeta &= \{x \in A \mid f(x) \in f(I)\} = \{x \in A \mid (\exists)y \in I, f(x) = f(y)\} = \\ &= \{x \in A \mid (\exists)y \in I, x - y \in \text{Ker} f\} = \{x \in A \mid x \in I\} = I. \end{aligned}$$

Aplicând acum teorema fundamentală de izomorfism morfismului de inele ζ , obținem izomorfismul dintre inelele factor A/I și $B/f(I)$. $\square$

III. GEOMETRIE

I. Geometrie sintetica:

1. Transformari izometrice.
2. Transformarea prin inversiune. Grupul conform.

II. Geometrie analitica:

1. Vectori liberi in spatiu. Produse de vectori liberi si aplicatiile lor.
2. Ecuatii ale dreptelor si planelor in spatiu, unghiuri si distante.
3. Conice.

Bibliografie minimală:

- [1.] D. Smaranda, N. Soare, Transformari geometrice, Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, Bucuresti, 1988
- [2.] L. Nicolescu, V. Boskoff, Probleme practice de geometrie, Editura Tehnica Bucuresti, 1990.
- [3.] Gh. Atanasiu, Emil Stoica, Algebra liniara, geometrie analitica, Ed. Fair Partners, București, 2003.
- [4.] M. Neagu, E. Stoica, Algebra liniara, geometrie analitica si diferenciala. Culegere de probleme, Editura fair Partners, Bucuresti, 2009

1 Transformări izometrice

Definiția 1. Fie M o mulțime nevidă. Se numește **transformare** pe mulțimea M o corespondență bijectivă $T : M \rightarrow M$.

Dacă M este înzestrată cu o anumită structură geometrică, atunci T va fi numită *transformare geometrică*, iar în acest context elementele mulțimii M vor fi numite *puncte*.

Mulțimea tuturor transformărilor pe M este notată cu $\sigma(M)$ și formează un grup împreună cu compunerea funcțiilor, adică: $(\sigma(M), \circ) = \text{grup}$. Dacă G este un subgrup al lui $\sigma(M)$, atunci perechea (M, G) se numește *spațiu geometric* sau *spațiu cu grup fundamental*.

Izometria este transformarea geometrică care păstrează distanța. Distanța dintre două puncte A și B o vom nota prin $d(A, B)$. Transformările geometrice care sunt izometrii le vom numi *transformări izometrice*, iar în continuare vom prezenta transformările izometrice din plan.

Definiția 2. Fie π un plan euclidian. Se numește **izometrie a planului** π o aplicație $f : \pi \rightarrow \pi$ cu proprietatea $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$.

Propoziția 1. Orice izometrie a planului este o aplicație injectivă.

Demonstrație. Fie punctele $A, B \in \pi$ astfel încât $f(A) = f(B)$, aceasta înseamnă că $d(f(A), f(B)) = 0$. Dar, cum f este izometrie, avem $d(A, B) = d(f(A), f(B)) = 0$, deci $A = B$, adică f este injectivă. $\square$

Propoziția 2. Fie $f : \pi \rightarrow \pi$ o izometrie a planului. Dacă punctele A, B, C sunt coliniare, atunci punctele $f(A), f(B), f(C)$ sunt coliniare (mai mult, o izometrie conservă relația "a fi între").

Demonstrație. Fie punctele coliniare $A, B, C \in \pi$. Rezultă că $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$, dar ținând cont că f este izometrie, avem $d(f(A), f(B)) + d(f(B), f(C)) = d(f(A), f(C))$, deci punctele $f(A), f(B), f(C)$ sunt coliniare și $f(B)$ este între $f(A)$ și $f(C)$. $\square$

Observația 1. Orice izometrie conservă unghiurile, paralelismul și ortogonalitatea.

Propoziția 3. Orice izometrie a planului este o aplicație surjectivă.

Propoziția 4. Fie $f : \pi \rightarrow \pi$ o izometrie a planului. Dacă punctele A, B, C sunt necoliniare, atunci $\text{aria}(\triangle f(A)f(B)f(C)) = \text{aria}(\triangle ABC)$.

Observația 2. Orice izometrie transformă un segment într-un segment, o semidreaptă într-o semidreaptă, o dreaptă într-o dreaptă.

Transformarea identică $Id : \pi \rightarrow \pi$, definită prin $Id(A) = A$, $(\forall) \in \pi$, este o transformare izometrică.

Teorema 1. *Mulțimea izometriilor planului formează un grup în raport cu operația de compunere.*

Demonstrație. Fie f și g două izometrii ale planului. Rezultă că $d(f \circ g(A), f \circ g(B)) = d(f(A), f(B)) = d(A, B)$, deci $f \circ g$ este o izometrie. Este ușor de văzut ca transformarea identică Id este elementul neutru, iar cum f este bijectivă, atunci inversa ei este tot o izometrie, deoarece $d(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) = d(f(f^{-1}(A)), f(f^{-1}(B))) = d(A, B)$. $\square$

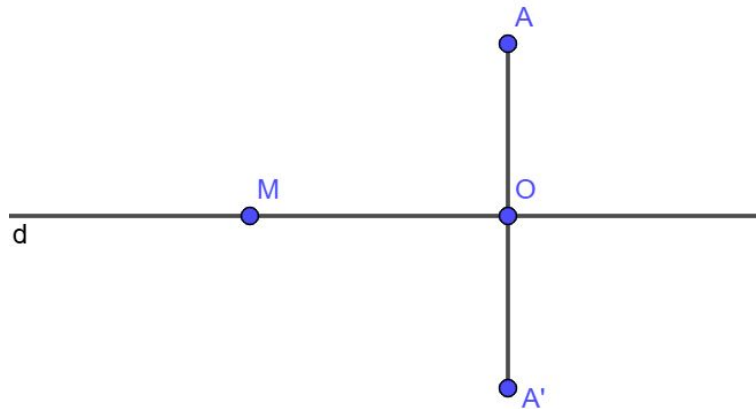
În continuare, vom studia următoarele transformări izometrice: simetria axială, simetria centrală, translația și rotația.

Simetria axială

Fie π un plan euclidian și d o dreaptă în planul π .

Definiția 3. *Se numește simetrie axială de axă d o aplicație $S_d : \pi \rightarrow \pi$ care asociază unui punct A din planul π un punct A' , astfel încât $AA' \perp d$, $AA' \cap d = \{O\}$, iar O este mijlocul segmentului $[AA']$.*

Vom scrie $S_d(A) = A'$ și spunem că punctul A' este simetricul punctului A față de dreapta d .



Propoziția 5. 1. *Orice simetrie axială transformă un segment într-un segment congruent cu el;*

2. *Orice simetrie axială transformă o semidreaptă într-o semidreaptă;*

3. Orice simetrie axială transformă o dreaptă într-o dreaptă;

4. Orice simetrie axială transformă un cerc într-un cerc de aceeași rază.

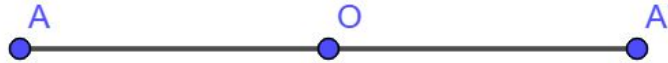
Fie $S_d(A) = A'$ și $S_d(B) = B'$, rezultă că $[AB] \equiv [A'B']$. Se arată că dacă $M \in [AB]$ și $S_d(M) = M'$, atunci $M' \in [A'B']$.

Simetria centrală

Fie π un plan euclidian, O și A două puncte în acest plan.

Definiția 4. Se numește **simetrie centrală de centru O** o aplicație $S_O : \pi \rightarrow \pi$ care asociază unui punct A din planul π un punct A' din planul π astfel încât punctul O este mijlocul segmentului $[AA']$.

Vom scrie $S_O(A) = A'$, iar punctul A' se numește simetricul punctului A față de punctul O .



Propoziția 6. 1. Orice simetrie centrală transformă un segment într-un segment congruent cu el;

2. Orice simetrie centrală transformă o semidreaptă într-o semidreaptă;

3. Orice simetrie centrală transformă o dreaptă într-o dreaptă paralelă cu dreapta inițială sau în aceeași dreaptă;

4. Orice simetrie centrală transformă un cerc într-un cerc de aceeași rază.

Fie $S_O(A) = A'$ și $S_O(B) = B'$, rezultă că $[AB] \equiv [A'B']$. Se arată că dacă $M \in [AB]$ și $S_O(M) = M'$, atunci $M' \in [A'B']$.

Observația 3. a) Simetriile sunt transformări involutive ($T^2 = Id$), i.e. $S_d \circ S_d = Id$, $S_O \circ S_O = Id$;
b) Orice izometrie involutivă este o simetrie axială sau centrală.

Fie a, b două drepte din planul π și $a \cap b = \{O\}$.

Propoziția 7. Dacă $a \perp b$, atunci mulțimea $\{Id, S_a, S_b, S_O\}$ formează un grup abelian.

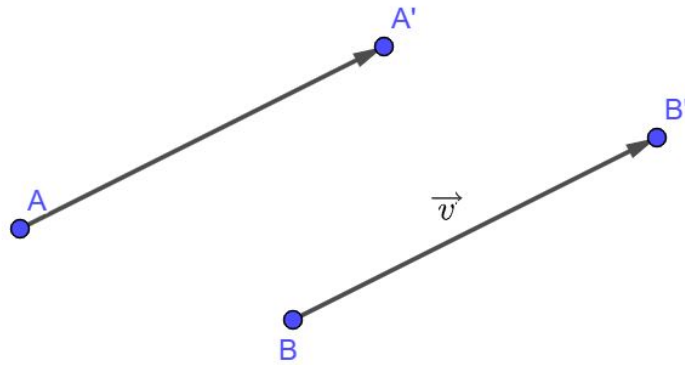
Teorema 2. Orice izometrie a planului este produsul a cel mult trei simetrii.

Translația

Fie π un plan euclidian și $\vec{v}$ un vector în acest plan.

Definiția 5. Se numește **translație de vector** $\vec{v}$ o aplicație $T_{\vec{v}} : \pi \rightarrow \pi$ care asociază fiecărui punct A din planul π un punct A' din planul π astfel încât $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$.

Vom scrie $T_{\vec{v}}(A) = A'$ și spunem că punctul A' este translatatul punctului A în raport cu vectorul $\vec{v}$.



Propoziția 8. 1. Orice translație de vector $\vec{v}$ transformă un segment într-un segment congruent cu el. În plus, segmentele sunt paralele sau se află pe aceeași dreaptă suport;

2. Orice translație de vector $\vec{v}$ transformă o semidreaptă într-o semidreaptă;

3. Orice translație de vector $\vec{v}$ transformă o dreaptă într-o dreaptă paralelă cu ea sau identică cu ea;

4. Orice translație de vector $\vec{v}$ transformă un cerc într-un cerc de aceeași rază.

Fie $T_{\vec{v}}(A) = A'$ și $T_{\vec{v}}(B) = B'$, rezultă că $[AB] \equiv [A'B']$. Se arată că dacă $M \in [AB]$ și $T_{\vec{v}}(M) = M'$, atunci $M' \in [A'B']$.

Observația 4. a) Compunerea translațiilor: $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u} + \vec{v}}$;
b) Orice translație este o izometrie care se descompune într-un produs de două simetrii centrale sau într-un produs de două simetrii axiale.
c) Mulțimea translațiilor împreună cu operația de compunere formează un grup abelian.

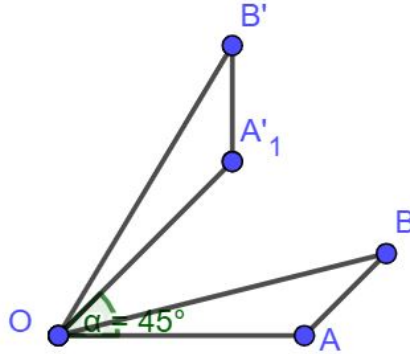
Rotația

Fie π un plan euclidian și $\mathcal{C}(O, r)$ un cerc de centru O și rază r în acest plan și $A, M \in \mathcal{C}(O, r)$.

Pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ există un unic $\alpha^* \in [0, 2\pi)$ și $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\alpha = \alpha^* + 2k\pi$. Notăm prin $\mu(\widehat{AM}_+)$ măsura în radiani a arcului $\widehat{AM}_+$, parcurs în sens trigonometric.

Definiția 6. Se numește **rotație de centru O și unghi α** o aplicație $R_{O,\alpha} : \pi \rightarrow \pi$ care asociază fiecărui punct A din planul π un punct A' din planul π astfel încât $OA = OA'$ și $\mu(\widehat{AA'}_+) = \alpha^*$.

Vom scrie $R_{O,\alpha}(A) = A'$ și spunem că punctul A' este rotitul cu unghiul α în raport cu centrul O a punctului A .



Propoziția 9. 1. Orice rotație transformă un segment într-un segment congruent cu el;

2. Orice rotație transformă o dreaptă într-o dreaptă;

3. Orice rotație transformă un cerc într-un cerc de aceeași rază.

Fie $R_{O,\alpha}(A) = A'$ și $R_{O,\alpha}(B) = B'$, rezultă că $[AB] \equiv [A'B']$. Se arată că dacă $M \in [AB]$ și $R_{O,\alpha}(M) = M'$, atunci $M' \in [A'B']$.

Observația 5. a) Compunerea rotațiilor: $R_{O,\alpha} \circ R_{O,\beta} = R_{O,\alpha+\beta}$;
b) $R_{O,0} = Id$, $R_{O,\pi} = S_O$;
c) Mulțimea rotațiilor de centru O împreună cu operația de compunere formează un grup abelian.

Teorema 3. Orice izometrie f poate fi reprezentată de compunerea unei translații T cu o izometrie g cu punct fix ($f = T \circ g, g(O) = O$).

Teorema 4. (Chasles) Orice izometrie f este una din transformările următoare: transformarea identică, simetrie axială, simetrie centrală, translație, rotație sau compunerea unei translații cu o izometrie cu punct fix.

Expresiile analitice ale izometriilor

Fie $\mathcal{R} = \{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ un reper ortonormat pozitiv în planul π . În raport cu acest reper ecuațiile izometriei f se scriu matriceal astfel:

$$X' = \mathcal{A}X + \mathcal{B},$$

unde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sunt coordonatele unui punct arbitrar $A(x, y)$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sunt coordonatele lui $f(A) = A'(x', y')$, $\mathcal{A}$ este o matrice ortogonală de ordinul doi ($\mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathcal{A}^T\mathcal{A} = I_2$) cu determinanul egal cu 1 (caz în care izometriile se numesc *deplasări*) sau determinanul egal cu -1 (situație în care izometriile se numesc *antideplasări*), iar $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Fie dreapta d de ecuație $ax + by + c = 0$ cu $a^2 + b^2 > 0$.

Ecuațiile simetriei axiale de dreaptă d sunt date de:

$$S_d : \begin{cases} x' = x - \frac{2a(ax+by+c)}{a^2+b^2} \\ y' = y - \frac{2b(ax+by+c)}{a^2+b^2} \end{cases}.$$

Fie un punct $O(x_0, y_0)$ în planul euclidian π .

Ecuațiile simetriei centrale de centru $O(x_0, y_0)$ sunt date de:

$$S_O : \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}.$$

Fie π un plan euclidian și $\vec{v}$ un vector în acest plan.

Ecuațiile translației de vector $\vec{v} = (b_1, b_2)$ sunt date de:

$$T_{\vec{v}} : \begin{cases} x' = x + b_1 \\ y' = y + b_2 \end{cases}.$$

Fie un punct $O(x_0, y_0)$ în planul euclidian π .

Ecuatiile rotației de centru $O(x_0, y_0)$ și unghi α sunt date de:

$$R_{O,\alpha} : \begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha + x_0 \\ y' = (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

Exerciții

1. Să se demonstreze că prin compunerea a două simetrii centrale obținem o translație.

Rezolvare. Fie simetriile centrale $S_{O_1} : \pi \rightarrow \pi$ și $S_{O_2} : \pi \rightarrow \pi$ astfel încât $S_{O_1}(A) = A'$ și $S_{O_2}(A') = A''$. Prin urmare, obținem $S_{O_2} \circ S_{O_1}(A) = S_{O_2}(A') = A''$. Acum considerăm translația de vector $\overrightarrow{2O_1O_2}$ și avem $T_{\overrightarrow{2O_1O_2}}(A) = A''$, deci $S_{O_2} \circ S_{O_1}(A) = A'' = T_{\overrightarrow{2O_1O_2}}(A)$, adică $S_{O_2} \circ S_{O_1} = T_{\overrightarrow{2O_1O_2}}$.

2. Fie A și B două puncte situate în același semiplan determinat de dreapta d . Determinați punctul $M \in d$ astfel încât suma $AM + MB$ să fie minimă.

Rezolvare. Fie $A' = S_d(A)$ și $A'B \cap d = \{M'\}$. Deducem că $M'A' = M'A$, deci $M'A + M'B = A'M' + M'B = A'B \leq MA' + MB = MA + MB$. Prin urmare, minimul se atinge când M coincide cu M' .

3. Fie punctele $A(3, -2)$, $B(3, 2)$, $O(1, 2)$ și unghiul $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Să se determine coordonatele punctelor $A' = S_O(A)$, $A'' = S_{OA}(B)$, $A_1 = T_{\overrightarrow{OA}}(B)$ și $A_2 = R_{O,\alpha}(B)$.

Rezolvare. Fie ecuațiile simetriei centrale

$$S_O(A) = A' : \begin{cases} x' = 2x_0 - x = 2 - 3 = -1 \\ y' = 2y_0 - y = 4 + 2 = 6. \end{cases}$$

Prin urmare, coordonatele lui A' sunt $(-1, 6)$.

Ecuatia dreptei OA este $2x + y - 4 = 0$, deci

$$S_{OA}(B) = A'' : \begin{cases} x'' = x - \frac{2a(ax+by+c)}{a^2+b^2} = 3 - \frac{16}{5} = -\frac{1}{5} \\ y'' = y - \frac{2b(ax+by+c)}{a^2+b^2} = 2 - \frac{8}{5} = \frac{2}{5}, \end{cases}$$

adică obținem $A''(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$. Avem $\overrightarrow{OA}(2, -4)$, deci

$$T_{\overrightarrow{OA}}(B) = A_1 : \begin{cases} x_1 = x + b_1 = 3 + 2 = 5 \\ y_1 = y + b_2 = 2 + (-4) = -2, \end{cases}$$

adică avem $A_1(5, -2)$.

Cum centrul de rotație este $O(x_0 = 1, y_0 = 2)$ și unghiul $\alpha = \frac{\pi}{3}$, atunci

$$R_{O,\frac{\pi}{3}}(B) = A_2 : \begin{cases} x_2 = (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha + x_0 = (3 - 1)\cos\frac{\pi}{3} + 1 = 2 \\ y_2 = (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha + y_0 = (3 - 1)\sin\frac{\pi}{3} + 2 = \sqrt{3} + 2, \end{cases}$$

adică avem $A_2(2, \sqrt{3} + 2)$.

Inversiunea în plan

Definiția 1. Fie π un plan euclidian, $O \in \pi$ un punct fix și $k \in \mathbb{R}^*$. **Inversiunea de pol O și modul k (putere k)** este o transformare a planului prin care fiecărui punct $A \in \pi \setminus \{O\}$ i se asociază un punct A' pe dreapta OA astfel încât $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = k$, iar punctului O i se asociază punctul O .

Inversiunea de pol O și modul k se notează $I_{O,k}$ și avem $I_{O,k} : \pi \rightarrow \pi$, unde:

1. $I_{O,k}(O) = O$;
2. $I_{O,k}(A) = A'$, $(\forall) A \in \pi \setminus O$, deci $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OI_{O,k}(A)} = k$.

Punctul A' se numește **inversul** lui A sau **transformatul punctului A prin inversiunea de pol O și modul k** . Pe scurt, punctul A și punctul A' sunt puncte inverse.

Observația 1. Dacă $A' = I_{O,k}(A)$, atunci:

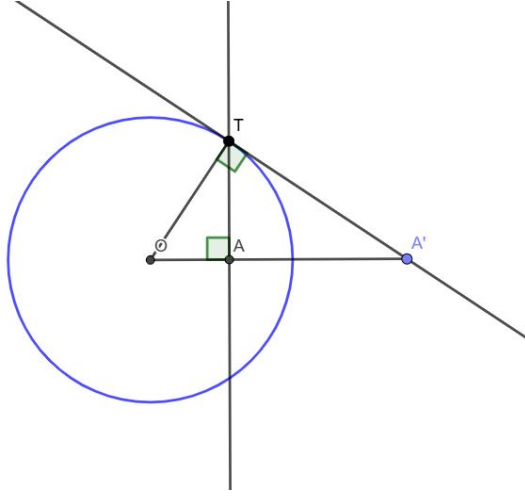
1. punctele O, A, A' sunt coliniare;
2. $A' \in (OA \iff k > 0$;
3. $O \in (AA') \iff k < 0$;
4. $OA \cdot OA' = |k|$.

Dacă avem $k > 0$, atunci $I_{O,k}$ se numește *inversiune pozitivă*, iar dacă avem $k < 0$, atunci $I_{O,k}$ se numește *inversiune negativă*.

Proprietăți 1. 1. Inversiunea este o transformare involutivă (involuție)

$$I_{O,k} \circ I_{O,k} = Id_{\pi}$$

2. Inversiunea este o aplicație inversabilă și $I_{O,k}^{-1} = I_{O,k}$.
3. Considerăm inversiunea $I_{O,k}$ de pol O și modul $k > 0$. Se observă că $I_{O,k}(A) = A, (\forall) A \in \mathcal{C}(O, \sqrt{k})$, deci toate punctele cercului $\mathcal{C}(O, \sqrt{k})$ sunt puncte fixe. Cercul $\mathcal{C}(O, \sqrt{k})$ se numește **cerc de inversiune**. Într-adevăr, pentru orice $A \in \mathcal{C}(O, \sqrt{k}) \implies \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OA'}| \cdot \cos 0 = \sqrt{k} \sqrt{k} \cdot 1 = k \implies I_{O,k}(A) = A$. Pe de altă parte, dacă $A \in \text{Int } \mathcal{C}(O, \sqrt{k})$ și ducem $AT \perp OA$, unde $T \in \mathcal{C}(O, \sqrt{k})$; ducem tangenta în punctul T care intersectează OA în A' . Aplicăm teorema catetei în triunghiul dreptunghic OTA' și atunci $OT^2 = OA \cdot OA' = k$, ceea ce înseamnă că $I_{O,k}(A) = A'$.



4. Un cerc Γ ce trece prin două puncte inverse A și $A' = I_{O,k}(A)$ taie ortogonal cercul de inversiune (două cercuri se numesc **ortogonale** dacă tangenta într-un punct comun la unul din cercuri trece prin centrul celuilalt cerc.)

Demonstrație. Fie P și P' punctele de intersecție ale lui Γ cu cercul de inversiune $\mathcal{C}(O, \sqrt{k}) \implies OA \cdot OA' = k = OP^2 \implies OP$ este tangentă la cercul Γ . $\square$

Observația 2. Un cerc diferit de cercul de inversiune este invariant în raport cu inversiunea dată dacă și numai dacă este ortogonal cu cercul de inversiune.

5. Inversiunea $I_{O,k}$ invariază toate dreptele ce trec prin O și O este un punct invariant în raport cu $I_{O,k}$.

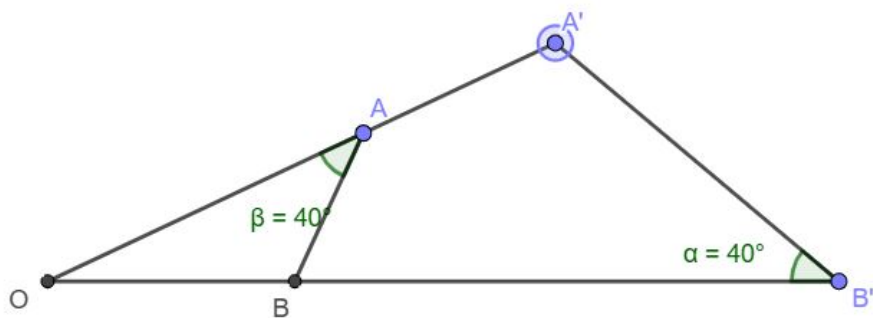
$$I_{O,k}(d) = d, \quad O \in d$$

Lema 1. Fie punctele A și B în planul euclidian π și inversiunea $I_{O,k} : \pi \rightarrow \pi$. Dacă $A' = I_{O,k}(A)$ și $B' = I_{O,k}(B)$ atunci:

1. Patrulaterul $ABB'A'$ este inscriptibil;
2. Are loc egalitatea:

$$A'B' = |k| \cdot \frac{AB}{OA \cdot OB}$$

Demonstrație. 1. Din $OA \cdot OA' = |k|$ și $OB \cdot OB' = |k| \implies \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}$ și $\angle AOB \equiv \angle B'OA' \xRightarrow{(LUL)} \triangle OAB \sim \triangle OB'A' \implies \angle OAB \equiv \angle OB'A'$, deci patrulaterul $ABB'A'$ este inscriptibil.



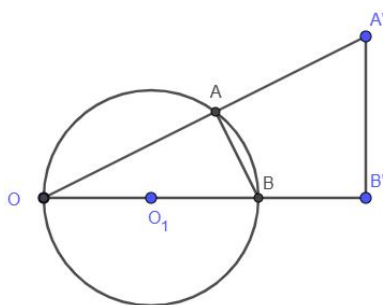
2. Din asemănarea triunghiurilor $\triangle OAB$ și $\triangle OB'A'$ avem $\frac{OA}{OB'} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow A'B' = AB \cdot \frac{OB'}{OA} \Rightarrow A'B' = AB \cdot \frac{OB' \cdot OB}{OA \cdot OB} = AB \cdot \frac{|k|}{OA \cdot OB}$. $\square$

Proprietăți 2. Fie inversiunea $I_{O,k} : \pi \rightarrow \pi$.

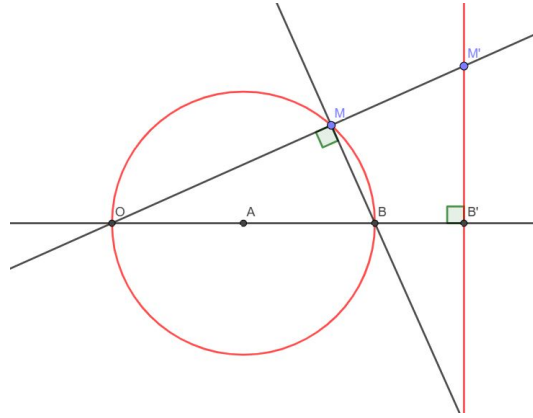
1. O dreaptă d care nu trece prin polul de inversiune se transformă într-un cerc care trece prin pol și din care se scoate punctul O .

Demonstrație. Fie $B \in d$ astfel încât $OB \perp d$ și un punct arbitrar $A \in d$. Avem: $I_{O,k}(A) = A'$ și $I_{O,k}(B) = B' \Rightarrow$ patrulaterul $ABB'A'$ este inscriptibil $\Rightarrow m(\angle AA'B') = 90^\circ \Rightarrow m(\angle OA'B') = 90^\circ$, iar B' este punct fix, ceea ce înseamnă că A' aparține cercului de diametru OB' .

2. Un cerc $\mathcal{C}(O_1, R)$ care trece prin polul de inversiune O , mai puțin punctul O , se transformă într-o dreaptă perpendiculară pe diametrul care trece prin polul O .



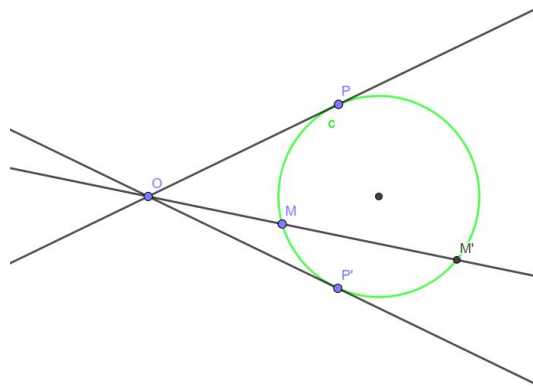
Demonstrație. Fie $\mathcal{C}(A, R)$ cercul care trece prin polul de inversiune O . Fie B punctul diametral opus lui O și $B' = I_{O,k}(B)$. Alegem un punct $M \in \mathcal{C}(A, R), M \neq O$ și $M' = I_{O,k}(M) \implies$ patrulaterul $BB'M'M$ este inscriptibil $\implies \angle OMB \equiv \angle OB'M' \implies m(\angle OB'M') = 90^\circ \implies M'B' \perp OB$, deci locul geometric al punctelor M' este perpendiculara în B' (care este punct fix) pe OB .



3. Inversul unui cerc care nu trece prin polul de inversiune este un cerc.

Demonstrație. Fie p puterea punctului O față de cercul dat.

Cazul I: Când $k = p$, inversul lui M care este M' se află pe același cerc. Această afirmație este justificată ținând cont că puterea lui M față de cercul dat este: $OM \cdot OM' = k = p = OP^2 = OP'^2$. Deci, cercul dat se transformă în el însuși. În particular, punctele P și P' sunt puncte fixe ale inversiunii $I_{O,k}$.



Cazul II: Pentru $k \neq p$, inversul M' al lui M nu se mai află pe cercul dat $\mathcal{C}$. Fie $\{N\} = OM \cap \mathcal{C}$. $I_{O,k}(M) = M'$, O_1 centrul cercului $\mathcal{C}$, $OO_1 \cap \mathcal{C} = \{A, B\}$, $I_{O,k}(A) = A'$, $OM \cdot OM' = |k|$ (inversiune) și $OM \cdot ON = p$ (puterea punctului O față de $\mathcal{C}$).

Atunci $\frac{OM'}{ON} = \frac{|k|}{p}$, $p = OO_1^2 - R^2$. Deci M' este omoteticul punctului

N în raport cu omotetia de centru O și raport $\frac{|k|}{p}$. Deoarece omoteticul

unui cerc este un cerc cu raza $R' = \frac{|k|}{p}R$, rezultă că inversul unui cerc ce nu trece prin pol este un cerc.

Pentru a identifica centrul acestuia, ținem cont că AB este diametru pentru cercul inițial $\mathcal{C}$. Notând $A' = I_{O,k}(A)$ și $B' = I_{O,k}(B)$, obținem că centrul cercului transformat este mijlocul lui $A'B'$. Într-adevăr, aplicând Lema 1, avem

$$2R' = A'B' = |k| \cdot \frac{AB}{OA \cdot OB} = |k| \cdot \frac{2R}{p}.$$

Observația 3. O altă abordare este următoarea: $\frac{p}{|k|} = \frac{OB \cdot OA}{OA' \cdot OA} = \frac{OB}{OA'}$, dar $\angle OMA \equiv \angle OA'M'$ și $\angle OMA \equiv \angle OBN$ (patrulaterul $ABNM$ este inscripabil) $\implies \angle OBN \equiv \angle OA'M' \implies BN \parallel M'A' \implies \frac{OB}{OA'} = \frac{NB}{M'A'} = \frac{p}{|k|} \implies I_{O,k}(\mathcal{C}(O_1, R)) = \mathcal{C}(O_2, R') \implies \triangle O_1BN \sim \triangle O_2A'M'$ ($\angle O_1NB \equiv \angle O_1BN \equiv \angle O_2A'M' \equiv \angle O_2M'A'$) $\implies \frac{NB}{M'A'} = \frac{R}{R'}$. Obținem astfel că $\frac{R}{R'} = \frac{p}{|k|}$, deci:

$$R' = \frac{|k|}{p} \cdot R$$

Teorema 1. Mulțimea tuturor omotetiilor și a inversiunilor planului de același centru O formează un grup. Acest grup se numește **grupul conform**.

Demonstrație. Considerăm mulțimea omotetiilor de centru O din plan și raport k împreună cu mulțimea inversiunilor de pol O și modul r din plan, $H_{O,k}, I_{O,r} : \pi \rightarrow \pi$, $k, r \in \mathbb{R}^*$.

Arătăm, mai întâi, că omotetiile formează un grup. Fie M un punct arbitrar în plan și $H_{O,k_2}(M) = M'$ și $H_{O,k_1}(M') = M'' \implies \overrightarrow{OM'} =$

$k_2 \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM''} = k_1 \overrightarrow{OM'}$, deci $\overrightarrow{OM''} = k_1 k_2 \overrightarrow{OM}$, ceea ce înseamnă că $H_{O,k_1} \circ H_{O,k_2}(M) = H_{O,k_1 k_2}(M)$. Prin urmare, găsim că $H_{O,k_1} \circ H_{O,k_2} = H_{O,k_1 k_2}$. Observăm că elementul neutru este $H_{O,1} = Id$, deoarece $H_{O,1}(M) = M = Id(M)$, deci $H_{O,k} \circ Id = Id \circ H_{O,k} = H_{O,k}$. Ținând cont că $H_{O,k} \circ H_{O,\frac{1}{k}} = H_{O,1}$ obținem $H_{O,k}^{-1} = H_{O,\frac{1}{k}}$. De asemenea avem $I_{O,r} \circ Id = Id \circ I_{O,r} = I_{O,r}$.

Ne întrebăm cine este compunerea $I_{O,r_1} \circ I_{O,r_2}$?

Dacă avem $I_{O,r_2}(M) = M'$, $I_{O,r_1}(M') = M'' \implies \overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = r_2$, $\overrightarrow{OM''} \cdot \overrightarrow{OM'} = r_1 \implies OM' \cdot OM = |r_2|$ și $OM'' \cdot OM' = |r_1| \implies \frac{OM''}{OM} = \frac{|r_1|}{|r_2|} \implies OM'' = \frac{|r_1|}{|r_2|} OM$. Deoarece punctele O, M, M' și M'' sunt coliniare, avem, de fapt: $\overrightarrow{OM''} = \frac{r_1}{r_2} \overrightarrow{OM}$. În particular, $I_{O,r_1} \circ I_{O,r_2} = H_{O,\frac{r_1}{r_2}} \implies I_{O,r} \circ I_{O,r} = Id$.

Deci, compunerea dintre două inversiuni de pol O este o omotetie de centru O . Prin urmare, există $I_{O,r}^{-1}$ și $I_{O,r}^{-1} = I_{O,r}$.

Ne întrebăm cine sunt compunerile $I_{O,r} \circ H_{O,k}$ și $H_{O,k} \circ I_{O,r}$?

Dacă avem $H_{O,k}(M) = M' \implies \overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ și $I_{O,r}(M') = M'' \implies \overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM''} = r$, atunci obținem $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM''} = \frac{r}{k}$, deci $I_{O,r} \circ H_{O,k} = I_{O,\frac{r}{k}}$, adică compunerea dintre o inversiune și o omotetie cu același centru O este o inversiune de pol O .

Dacă avem $I_{O,r}(M) = M' \implies \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = r$ și $H_{O,k}(M') = M'' \implies \overrightarrow{OM''} = k \cdot \overrightarrow{OM'}$, atunci obținem $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM''} = rk$, deci $H_{O,k} \circ I_{O,r} = I_{O,rk}$, adică compunerea dintre o omotetie și o inversiune cu același centru O este o inversiune de pol O .

Observăm că pentru $k \neq \pm 1$ deducem

$$I_{O,kr} = H_{O,k} \circ I_{O,r} \neq I_{O,r} \circ H_{O,k} = I_{O,\frac{r}{k}}.$$

Astfel, mulțimea tuturor inversiunilor și a omotetiilor planului de același centru O formează un grup necomutativ. $\square$

Observația 4. Grupul conform păstrează unghiurile (nu și lungimile laturilor).

Aplicații ale inversiunii

1. Teorema lui Ptolemeu

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Atunci are loc egalitatea:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Demonstrație. Considerăm o inversiune de pol A și putere arbitrară k , $I_{A,k} : (ABC) \rightarrow (ABC)$, unde (ABC) este planul ce conține punctele necoliniare A, B, C . Notăm cu d dreapta care este transformată prin inversiunea $I_{A,k}$ a cercului circumscris patrulaterului $ABCD$ și $I_{A,k}(B) = B'$, $I_{A,k}(C) = C'$ și $I_{A,k}(D) = D'$, ceea ce înseamnă, utilizând lema anterioară, că:

$$B'C' = |k| \cdot \frac{BC}{AB \cdot AC}, \quad C'D' = |k| \cdot \frac{CD}{AC \cdot AD} \quad \text{și} \quad B'D' = |k| \cdot \frac{BD}{AB \cdot AD}. \quad \text{Dar}$$

$$B'D' = B'C' + C'D', \quad \text{deci} \quad |k| \cdot \frac{BD}{AB \cdot AD} = |k| \cdot \frac{BC}{AB \cdot AC} + |k| \cdot \frac{CD}{AC \cdot AD}.$$

Înmulțind relația cu $\frac{AC}{|k|}$ rezultă:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

□

2. A doua teoremă a lui Ptolemeu

Fie $ABCD$ un patrulater convex inscriptibil. Atunci are loc relația

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}.$$

Demonstrație. Considerăm inversiunea $I_{A,k} : (ABC) \rightarrow (ABC)$, unde k este arbitrar. Fie $\mathcal{C}(O, R)$ cercul circumscris patrulaterului $ABCD$. Atunci $I_{A,k}(\mathcal{C}(O, R) \setminus \{A\}) = d$, unde d este o dreaptă perpendiculară pe OA . Fie $B' = I_{A,k}(B)$, $C' = I_{A,k}(C)$, $D' = I_{A,k}(D)$, deci $B', C', D' \in d$. Aplicăm Teorema lui Stewart în $\triangle AB'D'$ și avem $C' \in (B'D')$. Atunci:

$$AB'^2 \cdot C'D' + AD'^2 \cdot C'B' = AC'^2 \cdot B'D' + B'C' \cdot C'D' \cdot B'D'$$

$$\text{dar } AC \cdot AC' = |k|, \quad AB \cdot AB' = |k|, \quad AD \cdot AD' = |k| \implies AC' = \frac{|k|}{AC},$$

$$AB' = \frac{|k|}{AB}, \quad AD' = \frac{|k|}{AD}, \quad B'C' = |k| \cdot \frac{BC}{AB \cdot AC}, \quad C'D' = |k| \cdot \frac{CD}{AC \cdot AD},$$

$$B'D' = |k| \cdot \frac{BD}{AB \cdot AD} \quad \text{și atunci rezultă:}$$

$$\frac{|k|^2}{AB^2} \cdot \frac{|k| \cdot CD}{AC \cdot AD} + \frac{|k|^2}{AD^2} \cdot \frac{|k| \cdot BC}{AB \cdot AC} = \frac{|k|^2}{AC^2} \cdot \frac{|k| \cdot BD}{AB \cdot AD} + |k| \cdot \frac{BC}{AB \cdot AC} \cdot \frac{|k| \cdot CD}{AC \cdot AD} \cdot \frac{|k| \cdot BD}{AB \cdot AD}$$

$$\frac{AD \cdot CD + AB \cdot BC}{AB^2 \cdot AD^2 \cdot AC} = \frac{BD}{AB^2 \cdot AD^2 \cdot AC^2} \cdot (AB \cdot AD + BC \cdot CD)$$

$$AD \cdot CD + AB \cdot BC = \frac{BD}{AC} \cdot (AB \cdot AD + BC \cdot CD)$$

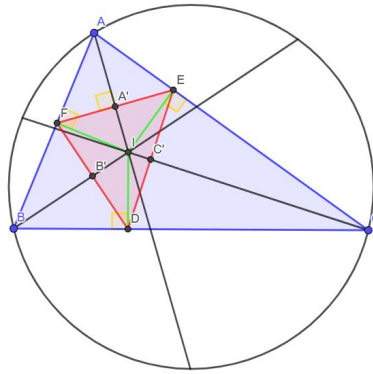
de unde rezultă enunțul. $\square$

3. Relația lui Euler

Într-un triunghi ABC , fie $\mathcal{C}(O, R)$ cercul circumscris triunghiului ABC și $\mathcal{C}(I, r)$ cercul înscris în triunghi. Atunci:

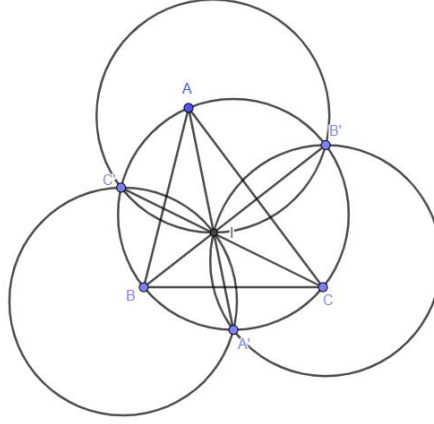
$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Demonstrație. Fie punctele D, E, F picioarele perpendicularelor duse din centrul cercului înscris I pe laturile $[BC], [AC], [AB]$. Bisectoarea AI intersectează FE în mijlocul A' al acestuia. $\triangle AFI \sim \triangle FA'I \implies FI^2 = IA' \cdot IA \implies IA' \cdot IA = r^2$. Considerăm inversiunea $I_{I, r^2} : (ABC) \rightarrow (ABC)$. Cercul $\mathcal{C}(I, r)$ se transformă în el însuși ($\mathcal{C}(O, \sqrt{k})$) este fix $\implies A' = I_{I, r}(A)$. Analog, $B' = I_{I, r}(B)$, $C' = I_{I, r}(C)$. Prin urmare vârfurile triunghiului ABC se transformă în mijloacele laturilor $\triangle DEF$. Rezultă că cercul $\mathcal{C}(O, R)$ se transformă în cercul celor nouă puncte asociat triunghiului DEF , care are raza $\frac{r}{2}$. Utilizând relația $\frac{r'}{R} = \frac{|k|}{p}$, unde $k = r^2$, iar $p = R^2 - OI^2$ este puterea punctului I față de cercul $\mathcal{C}(O, R) \implies \frac{r}{2R} = \frac{r^2}{R^2 - OI^2} \implies R^2 - OI^2 = 2Rr$. $\square$



4. (Problema piesei de cinci lei a lui Țițeica).

Trei cercuri având razele egale se intersectează într-un punct. Luându-se două câte două, se obțin încă trei puncte de intersecție. Cercul determinat de cele trei puncte are raza egală cu raza cercurilor date.



Demonstrație. Se consideră un triunghi ABC . Fie $\mathcal{C}(I, r)$ cercul înscris $\triangle ABC$ și $\mathcal{C}(O, R)$ cercul circumscris $\triangle ABC$. Considerăm inversiunea $I_{I, -R^2 + OI^2}$. Ținând cont de relația lui Euler, $OI^2 = R^2 - 2Rr$, avem practic inversiunea $I_{I, -2Rr}$. Cercul $\mathcal{C}(O, R)$ se va transforma prin inversiune tot într-un cerc. Arătăm că acesta este, de fapt, tot $\mathcal{C}(O, R)$, astfel: fie A', B', C' punctele de intersecție ale bisectoarelor unghiurilor triunghiului cu cercul. Folosind puterea punctului I față de cercul $\mathcal{C}(O, R)$ rezultă relațiile: $IA \cdot IA' = IB \cdot IB' = IC \cdot IC' = R^2 - OI^2$ ceea ce înseamnă că $I_{I, OI^2 - R^2}(A) = A'$, $I_{I, OI^2 - R^2}(B) = B'$, $I_{I, OI^2 - R^2}(C) = C'$, adică $I_{I, OI^2 - R^2}(\mathcal{C}(O, R)) = \mathcal{C}(O, R)$. Dreapta BC care nu trece prin polul de inversiune I se transformă într-un cerc ce trece prin punctele I, B', C' astfel încât tangenta în I la acest cerc este paralelă cu BC . Aplicăm Teorema Sinusurilor pentru $\triangle IB'C' \implies \frac{B'C'}{\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)} = 2R'$, unde R' este raza cercului circumscris $\triangle IB'C'$. Dar $B'C' = 2R \sin\left(\pi - \frac{B+C}{2}\right) = 2R \sin\left(\frac{B+C}{2}\right)$, ceea ce înseamnă că $2R = 2R'$, deci $R = R'$. Analog pentru cercurile circumscrise triunghiurilor $\triangle IC'A'$, $\triangle IA'B'$. $\square$

Aplicația 5. Fie A, B, C trei puncte distincte pe un cerc de centru O . Dacă avem inversiunea de pol A și putere k , $I_{A,k} : (ABC) \rightarrow (ABC)$ cu $I_{A,k}(B) = B'$, $I_{A,k}(C) = C'$, atunci $I_{A,k}(O) = A'$, unde A' este simetricul lui A față de dreapta $B'C'$.

Demonstrație. Fie A'' punctul diametral opus lui $A \implies I_{A,k}(A'') = E \implies \overrightarrow{AA''} \cdot \overrightarrow{AA'} = k \implies \frac{1}{2} \overrightarrow{AA''} \cdot 2\overrightarrow{AE} = k \implies \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AA'} = k \implies I_{A,k}(O) = A'$. $\square$

3. Dacă aplicăm inegalitatea Ionescu-Weitzenböck (în $\triangle ABC$ avem $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\sigma[ABC]$), atunci avem:

$$B'D'^2 + C'D'^2 + B'C'^2 \geq 4\sqrt{3}\sigma[B'C'D'] = 4\sqrt{3}\frac{B'C' \cdot C'D'}{2}\sin(B+D)$$

Atunci:

$$\frac{|r|^2 \cdot BD^2}{AB^2 \cdot AD^2} + \frac{|r|^2 \cdot CD^2}{AC^2 \cdot AD^2} + \frac{|r|^2 \cdot BC^2}{AB^2 \cdot AC^2} \geq 2\sqrt{3} \cdot \frac{|r|^2 \cdot BC}{AB \cdot AC} \cdot \frac{CD}{AC \cdot AD} \cdot \sin(B+D)$$

ceea ce înseamnă că:

$$AC^2 \cdot BD^2 + AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 \geq 2\sqrt{3} \cdot AB \cdot AD \cdot BC \cdot CD \cdot \sin(B+D)$$

Vectori liberi și operații cu aceștia

1 Spațiul vectorial al vectorilor liberi

Notăm cu $\mathcal{M}_3 = \{A, B, C, \dots\}$ mulțimea punctelor spațiului euclidian, definit axiomatic în geometria sintetică.

Fie $A, B \in \mathcal{M}_3$ două puncte arbitrare. Prin *vectorul legat* (*segmentul orientat*) $\overrightarrow{AB}$, înțelegem segmentul AB echipat cu sensul de parcurgere de la A (numit origine) către B (numit vârf). Vectorul legat $\overrightarrow{BA}$, notat și cu $-\overrightarrow{AB}$, poartă numele de opusul lui $\overrightarrow{AB}$, iar vectorul $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$ se numește vectorul nul. Lungimea (mărimea, norma) $\|\overrightarrow{AB}\|$ a vectorului legat $\overrightarrow{AB}$ se definește ca fiind lungimea

segmentului AB . În plus, pentru orice vector legat nenul $\overrightarrow{AB}$, are sens să definim direcția acestuia, ca fiind formată din dreapta suport AB împreună cu mulțimea dreptelor paralele cu AB .

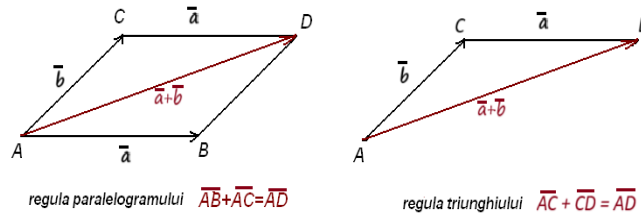
Spunem că doi vectori legați $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sunt *echipolenți* (și notăm $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$) dacă ei au aceeași direcție, același sens și aceeași mărime¹. Relația de echipolență, notată cu $\sim$, este o relație de echivalență pe mulțimea segmentelor orientate.

Clasa de echipolență $\overrightarrow{AB} = [\overrightarrow{AB}]_{\sim}$ a segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$ poartă numele de *vectorul liber geometric* (pe scurt, *vectorul liber*) $\overline{AB}$; astfel, segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ este un reprezentant al clasei $\overline{AB}$. Dacă nu dorim să specificăm un reprezentant anume, vom nota vectorii liberi cu litere mici: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ etc.

Observație: Dacă $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, atunci, ca segmente orientate (mulțimi de puncte), $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, însă vectorii liberi $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ sunt egali.

Notăm cu $\mathcal{E}_3$ mulțimea vectorilor liberi din spațiu și introducem pe aceasta două operații:

1. Adunarea $+$: $\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3, (\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \bar{a} + \bar{b}$, definită prin regula paralelogramului (echivalent, prin regula triunghiului):



2. Amplificarea cu scalari reali $\cdot_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3, (\alpha, \bar{a}) \mapsto \alpha \bar{a}$, unde vectorul liber $\alpha \bar{a}$ este definit de:

- aceeași direcție cu $\bar{a}$;

¹Vectorul nul $\overrightarrow{AA}$ nu are direcție sau sens; considerăm însă: $\overrightarrow{AA} \sim \overrightarrow{BB}$.etc.

- lungimea $\|\alpha\bar{a}\| = |\alpha| \|\bar{a}\|$,
- sensul - același cu al lui $\bar{a}$ dacă $\alpha > 0$ și opus lui $\bar{a}$, dacă $\alpha < 0$.

Operațiile introduse mai sus sunt corect definite, adică, nu depind de reprezentanții aleși pentru clasele de echivalență. Mai mult, pentru orice $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{E}_3$ și orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, au loc egalitățile:

$$\begin{aligned} (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}), & (\alpha + \beta)\bar{a} &= \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}, \\ \bar{a} + \bar{b} &= \bar{b} + \bar{a}, & \alpha(\bar{a} + \bar{b}) &= \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}, \\ \bar{0} + \bar{a} &= \bar{a}, & \alpha(\beta\bar{a}) &= (\alpha\beta)\bar{a}, \\ \bar{a} + (-\bar{a}) &= \bar{0}, & 1\bar{a} &= \bar{a}. \end{aligned}$$

Altfel spus, are loc următorul rezultat:

Teorema 1 *Tripletul $(\mathcal{E}_3, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ este un spațiu vectorial.*

Similar, mulțimea $\mathcal{E}_2$ a vectorilor liberi din plan și mulțimea $\mathcal{E}_1$ a vectorilor liberi de pe dreaptă, formează spații vectoriale împreună cu restricțiile la acestea ale lui $+$ și $\cdot_{\mathbb{R}}$ definite mai sus, adică, sunt subspații ale lui $\mathcal{E}_3$.

Dependența liniară pe $\mathcal{E}_3$:

- 1) O mulțime formată cu un singur vector $\{\bar{a}\}$, este liniar dependentă dacă și numai dacă $\bar{a} = \bar{0}$.
- 2) Doi vectori liberi $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{E}_3$ sunt liniar dependenți dacă și numai dacă $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\bar{b} = \alpha\bar{a}. \quad (1)$$

Geometric, aceasta se traduce prin faptul că $\bar{a}$ și $\bar{b}$ au aceeași direcție; spunem că $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt *coliniari* și notăm: $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

- 3) Pentru trei vectori liberi $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{E}_3$, liniar dependența înseamnă că $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}. \quad (2)$$

Această condiție este echivalentă cu faptul că $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sunt *coplanari* (adică, reprezentanții lor cu origine comună sunt situați în același plan).

Din cele de mai sus, concluzionăm că:

1. Pe dreaptă există un vector liniar independent; orice doi vectori sunt liniar dependenți.
2. În plan există doi vectori liniar independenți; orice trei vectori sunt liniar dependenți.
3. În spațiu există trei vectori liniar independenți; orice patru vectori sunt liniar dependenți.

Pe scurt: $\dim \mathcal{E}_1 = 1$, $\dim \mathcal{E}_2 = 2$, $\dim \mathcal{E}_3 = 3$.

Structura de spațiu afin a spațiului vectorilor liberi. Repere afine.

Un *spațiu afin* n -dimensional este un triplet $\mathcal{A} = (\mathcal{M}, V, \varphi)$, unde $\mathcal{M} \neq \emptyset$ este o mulțime oarecare (numită mulțimea *punctelor* lui $\mathcal{A}$), $(V, +, \cdot_K)$ este un spațiu vectorial cu $\dim V = n$, iar $\varphi : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow V$, $(A, B) \mapsto \varphi(A, B)$, o funcție cu următoarele proprietăți:

- (i) Pentru orice $A \in \mathcal{M}$ și orice $\bar{v} \in V$, există un unic $B \in \mathcal{M}$ astfel încât $\varphi(A, B) = \bar{v}$.
- (ii) (*Regula triunghiului*) Pentru orice $A, B, C \in \mathcal{M}$: $\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$.

Exemple de spații afine:

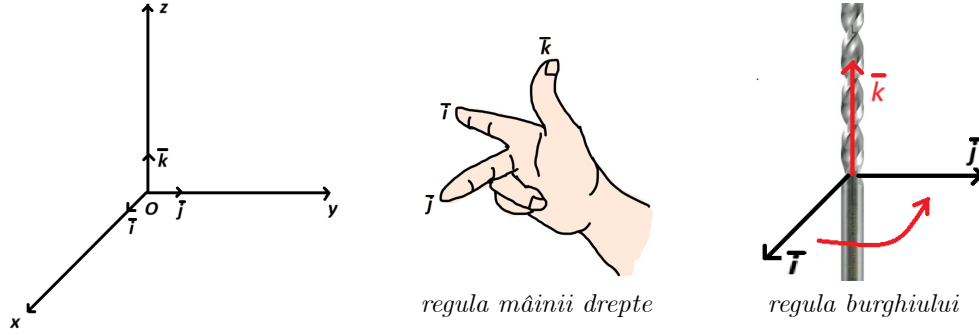
1) Spațiul afin euclidian al vectorilor liberi $\mathcal{A}_3 = (\mathcal{M}_3, \mathcal{E}_3, \varphi)$, unde $\mathcal{M}_3, \mathcal{E}_3$ au fost introduse mai sus și $\varphi(A, B) = \overrightarrow{AB}$; de asemenea, putem identifica segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ cu capetele lui, adică cu perechea ordonată ("bipunctul") $(A, B) \in \mathcal{M}_3 \times \mathcal{M}_3$.

2) Spațiul afin standard $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \varphi)$, unde $\varphi(x, y) = y - x$.

Pe un spațiu afin $\mathcal{A} = (\mathcal{M}, V, \varphi)$, un **reper afin** este definit ca o pereche $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ formată dintr-un punct arbitrar fixat $O \in \mathcal{M}$, numit *origine* și o bază $\mathcal{B}$ a lui V . În particular, pe spațiul $\mathcal{A}_3$, un reper afin este format dintr-un punct fixat O și trei vectori nenuli și necoplanari.

În practică însă, în majoritatea covârșitoare a cazurilor, nu vom folosi însă repere afine oarecare, ci *repere carteziane* $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, definite de:

- Baza $\mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ este ortonormată, adică: $\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k} \perp \bar{i}$, $\|\bar{i}\| = \|\bar{j}\| = \|\bar{k}\| = 1$.
- $\mathcal{B}$ este drept orientată, adică: sensul lui $\bar{j}$ se obține din sensul lui $\bar{i}$ printr-o rotație de unghi 90° în sens trigonometric, iar sensul lui $\bar{k}$ se obține din sensurile lui $\bar{i}$ și $\bar{j}$ prin *regula burghiului* (echivalent, prin *regula mâinii drepte*):



Coordonate carteziane în spațiu. Fie, în continuare, $\mathcal{R}$ un reper cartezian pe $\mathcal{A}_3$.

- Pentru vectorii liberi $\bar{v} \in \mathcal{E}_3$, coordonatele carteziane (x, y, z) ale lui $\bar{v}$ sunt date de descompunerea $\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ în baza $\mathcal{B}$.
- Coordonatele punctului $A \in \mathcal{M}$ sunt, prin definiție, coordonatele *vectorului de poziție* $\overrightarrow{OA}$:

$$A(x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}(x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

În consecință, coordonatele vectorului liber $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ vor fi date de: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

2 Produse de vectori liberi

2.1 Produsul scalar

Pe spațiul vectorial $\mathcal{E}_3$, definim aplicația $\cdot : \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \bar{a} \cdot \bar{b}$ astfel:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} := \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \cos \alpha, \quad (3)$$

unde $\alpha = \angle(\bar{a}, \bar{b}) \in [0^\circ, 180^\circ]$ este unghiul cel mai mic dintre vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

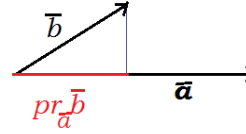
Propoziția 2 Aplicația " $\cdot$ " are următoarele proprietăți:

- 1) Comutativitate (simetrie): $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{E}_3 : \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$.
- 2) Omogenitate: $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{E}_3, \forall \alpha \in \mathbb{R} : (\alpha \bar{a}) \cdot \bar{b} = \alpha(\bar{a} \cdot \bar{b})$.
- 3) Aditivitate: $(\bar{a} + \bar{c}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot \bar{b}, \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{E}_3$.
- 4) Pozitivă definită: $\forall \bar{a} \in \mathcal{E}_3 : \bar{a} \cdot \bar{a} \geq 0$ și $\bar{a} \cdot \bar{a} = 0 \Rightarrow \bar{a} = 0$.

Proprietățile 1), 2) și 4) sunt imediate, iar 3) se bazează pe următoarea leamnă:

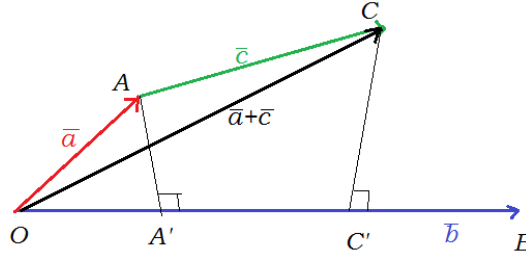
Lema 3 (Mărimea proiecției unui vector pe alt vector): Pentru orice $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{E}_3$, cu $\bar{a} \neq 0$, mărimea proiecției lui $\bar{b}$ pe $\bar{a}$ este:

$$pr_{\bar{a}} \bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\|}.$$



Demonstrația lemei: Mărimea proiecției lui $\bar{a}$ pe $\bar{b}$ este: $pr_{\bar{a}} \bar{b} = \|\bar{b}\| \cos \alpha$, unde $\alpha = \angle(\bar{a}, \bar{b})$. Amplificând forțat pe $\|\bar{b}\| \cos \alpha$ cu $\|\bar{a}\|$, obținem egalitatea cerută.

Demonstrația Propoziției 2, pc. 3): Fie punctele O, A, B, C astfel încât: $\bar{a} = \overline{OA}$, $\bar{b} = \overline{OB}$, $\bar{c} = \overline{AC}$. Proiectăm pe A și C pe $\overline{OB}$, în punctele A' , respectiv, C' :



Deoarece $\overline{OA'}$ și $\overline{A'C'}$ sunt coliniari, avem:

$$\|\overline{OA'}\| + \|\overline{A'C'}\| = \|\overline{OC'}\|, \quad (4)$$

Însă: $\|\overline{OA'}\| = pr_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{b}\|}$, $\|\overline{A'C'}\| = pr_{\bar{b}} \bar{c} = \frac{\bar{c} \cdot \bar{b}}{\|\bar{b}\|}$, $\|\overline{OC'}\| = pr_{\bar{b}}(\bar{a} + \bar{c}) = \frac{(\bar{a} + \bar{c}) \cdot \bar{b}}{\|\bar{b}\|}$. Înlocuind aceste expresii în (4) și amplificând cu $\|\bar{b}\|$, obținem $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot \bar{b} = (\bar{a} + \bar{c}) \cdot \bar{b}$, q.e.d.

Propoziția 2 spune că, de fapt, aplicația $\cdot : \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathbb{R}$ este o formă biliniară simetrică și pozitiv definită, adică, un *produs scalar* pe $\mathcal{E}_3$, respectiv, $\mathcal{E}_3$ are structură de *spațiu euclidian*.

Propoziția 4 (Expresia în coordonate carteziene a produsului scalar):

Pentru orice $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3) \in \mathcal{E}_3$, are loc egalitatea:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (5)$$

Demonstrație: Ținând cont că vectorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt ortonormați, avem:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\|^2 \cos 0 = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1; \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

Apoi, folosim aditivitatea și omogenitatea lui $\cdot$, deducem că:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = a_1 b_1 \vec{i} \cdot \vec{i} + a_1 b_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + \dots + a_3 b_3 \vec{k} \cdot \vec{k}.$$

Dintre produsele de mai sus, însă, doar $\vec{i} \cdot \vec{i}, \vec{j} \cdot \vec{j}$ și $\vec{k} \cdot \vec{k}$ sunt nenule, ceea ce conduce la (5).

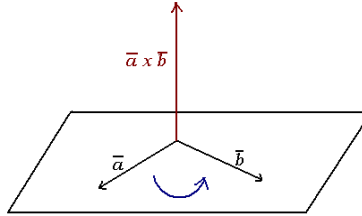
Aplicațiile produsului scalar:

1. Norma vectorului $\vec{a}(a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{E}_3$: $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
2. Unghiul α dintre vectorii nenuli $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este dat de: $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$. În particular, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

2.2 Produsul vectorial

Definiția 5 Produsul vectorial al vectorilor $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}_3$ este vectorul $\vec{a} \times \vec{b} \in \mathcal{E}_3$ caracterizat de:

- direcție: perpendicular pe direcțiile lui $\vec{a}$ și $\vec{b}$;
- sens: dat de regula burghiului/regula mâinii drepte;
- mărime: $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \alpha$, unde α este unghiul cel mai mic dintre $\vec{a}$ și $\vec{b}$.



Propoziția 6 Produsul vectorial $\times : \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3$ are următoarele proprietăți:

1. anticomutativitate: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}_3$;
2. aditivitate: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathcal{E}_3$;
3. omogenitate: $\vec{a} \times (\alpha \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha \vec{a} \times \vec{b}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}_3, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
4. dacă $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt nenuli, atunci $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari.

Expresia în coordonate: Fie $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$. Pentru a determina expresia în coordonate a produsului $\bar{a} \times \bar{b}$, calculăm întâi cu ajutorul definiției, produsele $\bar{i} \times \bar{i}$, $\bar{i} \times \bar{j}$, ..., $\bar{j} \times \bar{k}$:

$$\begin{array}{c|ccc} \times & \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \hline \bar{i} & 0 & \bar{k} & -\bar{j} \\ \bar{j} & -\bar{k} & 0 & \bar{i} \\ \bar{k} & \bar{j} & -\bar{i} & 0 \end{array}.$$

Folosind apoi liniaritatea lui $\times$ în fiecare argument, obținem, prin calcul direct:

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\bar{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\bar{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\bar{k}. \quad (6)$$

Ultima egalitate se poate rescrie sub forma unui determinant formal:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Aplicațiile produsului vectorial:

1. Aria paralelogramului cu laturile $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este $\mathcal{A}_{(\bar{a}, \bar{b})} = \|\bar{a} \times \bar{b}\|$.
2. Aria triunghiului cu laturile $\bar{a}$ și $\bar{b}$: $\mathcal{A}_\Delta = \frac{1}{2} \|\bar{a} \times \bar{b}\|$.
3. Dacă $\bar{v} \perp \bar{a}$, $\bar{v} \perp \bar{b}$, atunci $\bar{v}$ este coliniar cu $\bar{a} \times \bar{b}$: $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \bar{v} = \lambda \bar{a} \times \bar{b}$.

2.3 Produsul mixt a trei vectori

Definiția 7 *Produsul mixt* al vectorilor $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{E}_3$ este numărul real:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}).$$

Proprietățile produsului mixt vor deveni imediate, dacă descoperim mai întâi expresia lui în coordonate carteziane. Fie, pentru aceasta, fie: $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\bar{c}(c_1, c_2, c_3)$. Calculăm întâi produsul vectorial $\bar{b} \times \bar{c}$:

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \bar{k}.$$

Având expresia în coordonate a lui $\bar{b} \times \bar{c}$, putem calcula produsul scalar $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Am demonstrat astfel:

Propoziția 8 Într-un reper cartezian, produsul mixt are expresia:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Prin urmare, proprietățile produsului mixt sunt similare cu proprietățile determinantilor:

- 1) $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}), (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$.
- 2) *Omogenitate*: $(\alpha \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \alpha \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}, \alpha \bar{c}) = \alpha(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.
- 3) *Aditivitate*: $(\bar{a} + \bar{d}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) + (\bar{d}, \bar{b}, \bar{c})$.

Aplicațiile produsului mixt:

1. **Volumul paralelipipedului** construit pe vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$: $V_p = |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$.
2. **Volumul tetraedrului** construit pe $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ (ca muchii necoplanare) este

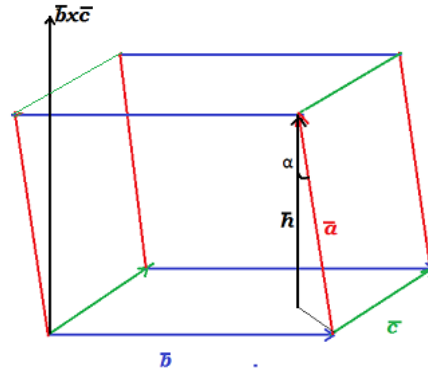
$$V_{tetr.} = \frac{1}{6} |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|.$$

3. $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ coplanari.

Demonstrație:

1. Volumul paralelipipedului cu muchiile $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ este $V_p = \text{aria}_{(\bar{b}, \bar{c})} \cdot h$, unde $h = \|\bar{h}\|$ este înălțimea corespunzătoare feței $(\bar{b}, \bar{c})$.

Însă, pe de o parte, $\text{aria}_{(\bar{b}, \bar{c})} = \|\bar{b} \times \bar{c}\|$, iar pe de altă parte, vectorul $\bar{h}$ este perpendicular pe fața $(\bar{b}, \bar{c})$, i.e., este coliniar cu produsul vectorial $\bar{b} \times \bar{c}$:



Fie $\alpha = \angle(\bar{a}, \bar{h}) = \angle(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c})$. Presupunem, pentru început, că $\alpha < 90^\circ$, adică, $\cos \alpha > 0$. Atunci, mărimea lui $\bar{h}$ este $\|\bar{h}\| = \|\bar{a}\| \cos \alpha$, cu alte cuvinte,

$$V_p = \|\bar{a}\| \|\bar{b} \times \bar{c}\| \cos \alpha = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}).$$

În cazul în care $\alpha > 90^\circ$, vom avea: $h = \|\bar{a}\| \cos(180^\circ - \alpha) = \|\bar{a}\| |\cos \alpha|$, respectiv, $V_p = |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$ (iar produsul $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ va fi negativ). Astfel, semnul produsului mixt $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ depinde de orientarea vectorilor $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

2. Volumul tetraedrului: În paralelipipedul $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ "încap" 6 tetraedre identice.
3. $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0 \Leftrightarrow V_p = 0 \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - coplanari.

2.4 Dublul produs vectorial

Dublul produs vectorial al vectorilor $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{E}_3$ este, prin definiție, vectorul $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$.

Propoziția 9 Pentru orice trei vectori $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{E}_3$, are loc egalitatea:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}. \quad (9)$$

În particular, $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ este un vector coplanar cu $\bar{b}$ și $\bar{c}$.

Demonstrație: Alegem pe $\mathcal{A}_3$ un reper cartezian, astfel încât planul xOy să fie planul lui $\bar{b}$ și $\bar{c}$. Cu reperul astfel ales, vom avea: $\bar{b}(b_1, b_2, 0)$, $\bar{c}(c_1, c_2, 0)$ și $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$. Afirmatia rezultă apoi prin calcul direct, evaluând separat cei doi membri ai egalității (9).

Dublul produs vectorial satisface o proprietate importantă:

Teorema 10 (Identitatea lui Jacobi): Pentru orice trei vectori $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{E}_3$:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b}) + \bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{0}.$$

Demonstrație: Folosim expresia (9) pentru a exprima fiecare dintre produsele $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$, $\bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b})$ și $\bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a})$. Ținând cont de comutativitatea produsului scalar, termenii se vor reduce doi câte doi și obținem identitatea cerută.

Consecință: $(\mathcal{E}_3, +, \cdot, \times)$ este o *algebră Lie*.

Observație: Din relația (9), observăm că produsul vectorial $\times : \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3$ **nu** este asociativ. Mai precis, $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ este coplanar cu $\bar{b}$ și $\bar{c}$, iar $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = -\bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b})$ este coplanar cu $\bar{a}$ și $\bar{b}$, astfel încât, în general, $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) \neq (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$.

3 Exerciții

Exercițiul 1 Fie $A(1, 2, 0)$, $B(1, 2, 1)$, $C(3, 0, 1)$. Pentru triunghiul ABC , calculați a) lungimile laturilor; b) unghiurile; c) aria; d) înălțimea din A .

Rezolvare: a) Avem $\overline{AB}(0, 0, 1)$, $\overline{AC}(2, -2, 1)$, $\overline{BC}(2, -2, 0)$, de unde găsim:

$$\|\overline{AB}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1, \|\overline{AC}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3, \|\overline{BC}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}.$$

b) Unghiurile A și B sunt date de: $\cos A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\|\overline{AB}\| \|\overline{AC}\|} = \frac{0 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$, $\cos B =$

$$\frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{\|\overline{BA}\| \|\overline{BC}\|} = -\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\|\overline{BA}\| \|\overline{BC}\|} = 0, \text{ prin urmare, } B = \frac{\pi}{2}, A = \arccos \frac{1}{3}, C = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{3}.$$

c) Aria o calculăm cu ajutorul produsului vectorial, ca: $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \|\overline{AB} \times \overline{AC}\|$. Avem:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 2\bar{j} \Rightarrow \|\overline{AB} \times \overline{AC}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta ABC} = \sqrt{2}.$$

d) Înălțimea h_A o obținem din: $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{\|\overline{BC}\| \cdot h_A}{2}$, ca: $h_A = 1$.

Exercițiul 2 Fie $\bar{m}, \bar{n} \in \mathcal{E}_3$ cu $\|\bar{m}\| = 1$, $\|\bar{n}\| = 2$ și $\angle(\bar{m}, \bar{n}) = 60^\circ$. Determinați: a) lungimile diagonalelor paralelogramului construit pe $\bar{m}$ și $\bar{n}$; b) aria paralelogramului cu laturile: $\bar{a} = 2\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - 3\bar{n}$.

Rezolvare: a) Diagonalele paralelogramului cu laturile $\bar{m}$ și $\bar{n}$ sunt $\bar{d}_1 = \bar{m} + \bar{n}$ și $\bar{d}_2 = \bar{m} - \bar{n}$.
Avem:

$$\|\bar{d}_1\| = \sqrt{\bar{d}_1 \cdot \bar{d}_1} = \sqrt{(\bar{m} + \bar{n}) \cdot (\bar{m} + \bar{n})} = \sqrt{\bar{m} \cdot \bar{m} + \bar{m} \cdot \bar{n} + \bar{n} \cdot \bar{m} + \bar{n} \cdot \bar{n}},$$

Folosind $\bar{m} \cdot \bar{m} = \|\bar{m}\|^2 = 1$, $\bar{n} \cdot \bar{n} = \|\bar{n}\|^2 = 4$, $\bar{m} \cdot \bar{n} = \bar{n} \cdot \bar{m} = \|\bar{m}\| \|\bar{n}\| \cos(\widehat{\bar{m}, \bar{n}}) = 1$, găsim $\|\bar{d}_1\| = \sqrt{7}$; similar, $\|\bar{d}_2\| = \sqrt{3}$.

b) Aria paralelogramului cu laturile $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este $\mathcal{A}_{(\bar{a}, \bar{b})} = \|\bar{a} \times \bar{b}\|$, adică:

$$\mathcal{A}_{(\bar{a}, \bar{b})} = \|(2\bar{m} + \bar{n}) \times (\bar{m} - 3\bar{n})\| = \|2\bar{m} \times \bar{m} + \bar{n} \times \bar{m} - 6\bar{m} \times \bar{n} - 3\bar{n} \times \bar{n}\|.$$

Însă, $\bar{m} \times \bar{m} = \bar{n} \times \bar{n} = 0$, $\bar{m} \times \bar{n} = -\bar{n} \times \bar{m}$, prin urmare: $\mathcal{A}_{(\bar{a}, \bar{b})} = \|7\bar{n} \times \bar{m}\| = 7\|\bar{n} \times \bar{m}\| = 7\|\bar{n}\| \|\bar{m}\| \sin(\widehat{\bar{m}, \bar{n}}) = 7\sqrt{3}$.

Exercițiul 3 Demonstrați identitatea lui Lagrange:

$$(\bar{a} \cdot \bar{b})^2 + \|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 = \|\bar{a}\|^2 \|\bar{b}\|^2.$$

Rezolvare: Fie $\alpha = \angle(\bar{a}, \bar{b})$. Identitatea rezultă din $\bar{a} \cdot \bar{b} = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \cos \alpha$, $\|\bar{a} \times \bar{b}\| = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \sin \alpha$.

Exercițiul 4 Găsiți $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\bar{a}(1, 2, 3)$, $\bar{b}(2, 0, 2)$ și $\bar{c}(4, 4, \lambda)$ să fie coplanari. Pentru λ astfel găsit, descompuneți pe $\bar{c}$ după direcțiile lui $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

Rezolvare: $\bar{a}, \bar{b}$ și $\bar{c}$ sunt coplanari dacă și numai dacă $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8$.

Pentru $\lambda = 8$, ecuația vectorială $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$ admite soluția $\alpha = 2, \beta = 1$, adică, $\bar{c} = 2\bar{a} + \bar{b}$.

Exercițiul 5 Determinați volumul tetraedrului $ABCD$, unde $A(1, 2, 3)$, $B(1, 2, 4)$, $C(2, 2, 4)$, $D(2, 3, 4)$ și distanța de la D la planul (ABC) .

Rezolvare: Avem: $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})| = \frac{1}{6}$.

Distanța de la A la planul (ABC) este înălțimea din D în tetraedru $h_D = \frac{3V_{ABCD}}{\mathcal{A}_{\Delta ABC}} = \frac{6V_{ABCD}}{\|\overline{AB} \times \overline{AC}\|}$.

Calculând $\overline{AB} \times \overline{AC}$ cu ajutorul formulei (7), găsim: $\|\overline{AB} \times \overline{AC}\| = \|\bar{j}\| = 1 \Rightarrow h_D = 1$.

Exercițiul 6 Știind că $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 1$, calculați: $(\bar{a}, \bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{c})$.

Rezolvare: Deoarece produsul mixt este distributiv față de adunare, putem scrie:
 $(\bar{a}, \bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{a} + \bar{b}, \bar{a}) + (\bar{a}, \bar{a} + \bar{b}, \bar{c})$. Însă, $(\bar{a}, \bar{a} + \bar{b}, \bar{a}) = 0$, prin urmare, $(\bar{a}, \bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{a}, \bar{c}) + (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0 + 1 = 1$.

Dreapta și planul în spațiu

Fiind dat un spațiu afin $\mathcal{A} = (\mathcal{M}, V, \varphi)$, prin subspațiu afin al lui $\mathcal{A}$ înțelegem un spațiu afin $\mathcal{A}' = (\mathcal{M}', V', \varphi|_{\mathcal{M}' \times \mathcal{M}'})$, unde: $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, V' este subspațiu lui V , iar $\varphi|_{\mathcal{M}' \times \mathcal{M}'}$ este restricția lui φ la $\mathcal{M}' \times \mathcal{M}'$. Echivalent, $\mathcal{A}'$ este subspațiu afin al lui $\mathcal{A}$ dacă și numai dacă pentru orice punct fixat $A \in \mathcal{M}'$, funcția parțială $\varphi(A, \cdot)$ are drept imagine pe V' : $\varphi(A, \mathcal{M}') = V'$.

În continuare, considerăm spațiul afin $\mathcal{A}_3 = (\mathcal{M}, \mathcal{E}_3, \varphi)$ al vectorilor geometrici, echipat cu un reper cartezian $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ - și vom studia subspațiile sale afine netriviiale, adică, *dreptele* și *planele*.

1 Ecuația planului în spațiu

1. Planul ce conține un punct și două direcții.

Fie $M(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{M}$ un punct arbitrar și $\bar{u}(u_1, u_2, u_3), \bar{v}(v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{E}_3$.

Notăm cu (π) planul care conține punctul M și direcțiile vectorilor $\bar{u}$ și $\bar{v}$ (echivalent, putem spune că (π) e paralel cu vectorii $\bar{u}$ și $\bar{v}$). Notăm cu $P(x, y, z)$ un punct arbitrar în spațiu.

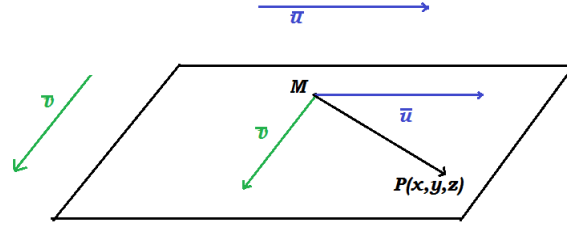


Fig 1: plan determinat de punct și două direcții

Faptul că $P \in (\pi)$ este echivalent cu aceea că vectorii $\overline{MP}$, $\bar{u}$ și $\bar{v}$ sunt coplanari. Cu ajutorul produsului mixt, această condiție se scrie:

$$(\overline{MP}, \bar{u}, \bar{v}) = 0;$$

în coordonate, ținând cont că $\overline{MP}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, obținem:

Propoziția 1 Ecuația planului (π) care conține punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ și direcțiile vectorilor $\bar{u}(u_1, u_2, u_3), \bar{v}(v_1, v_2, v_3)$ este:

$$(\pi) : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Caz particular: ecuația planului (ABC) ce trece prin trei puncte necoliniare $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ o obținem din (1), ținând cont că $\overline{AB}, \overline{AC} \subset (\pi)$:

$$(ABC) : \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0.$$

Ultima egalitate se mai poate scrie și sub forma:

$$(ABC) : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Ecuațiile parametrice ale planului

Cu notațiile din Fig. 1, condiția ca $\overline{MP}$, $\bar{u}$ și $\bar{v}$ să fie coplanari se mai poate scrie și:

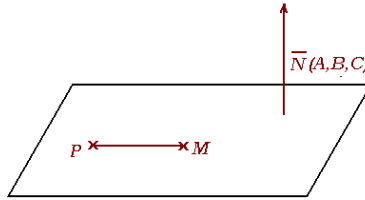
$$\overline{MP} = \lambda \bar{u} + \mu \bar{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Exprimând¹ această condiție în coordonate, obținem *ecuațiile parametrice* ale planului:

$$(\pi) : \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}. \quad (3)$$

3. Planul determinat de un punct și direcția normală

Pentru a determina ecuația unui plan în spațiu, este suficient să cunoaștem un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ în plan și un vector $\bar{N}(a, b, c)$ nenul și perpendicular pe plan, numit *vector normal*.



Să notăm cu (π) planul a cărui ecuație vrem să o determinăm. Pentru un punct arbitrar $P(x, y, z)$, condiția ca P să îi aparțină lui (π) este echivalentă cu: $\bar{N} \perp \overline{MP}$, adică: $\bar{N} \cdot \overline{MP} = 0$. În coordonate, aceasta se scrie:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \quad (4)$$

(ecuația planului care trece prin $M(x_0, y_0, z_0)$, având direcția normală $\bar{N}(a, b, c)$).

¹Condiția (2) ne spune că $P \in (\pi)$ dacă și numai dacă vectorul $\varphi(M, P) = \overline{MP}$ aparține subspațiului $V' \preceq \mathcal{E}_3$ generat de $\bar{u}$ și $\bar{v}$, altfel spus, $\varphi(M, (\pi)) = V'$, adică planul (π) este un subspațiu afin 2-dimensional al lui $\mathcal{A}_3$.

Efectuând calculele, fie în (4), fie în (1), vom obține întotdeauna o ecuație de tipul

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (5)$$

unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (cu a, b, c nu toți nuli), numită **ecuația generală a planului**. Reciproc, orice ecuație de gradul 1 în x, y, z descrie din punct de vedere geometric un plan în spațiul $\mathcal{A}_3$.

Observație: Coeficienții lui x, y și z din ecuația generală a planului reprezintă coordonatele unui vector normal la plan. De exemplu, planul $x + 3y - z + 5 = 0$ are direcția normală $\bar{N}(1, 3, -1)$.

Exemplu. Ecuațiile planelor de coordonate:

$$(xOy) : z = 0, \quad (yOz) : x = 0, \quad (xOz) : y = 0.$$

2 Ecuațiile dreptei în spațiu

A. Dreapta ca intersecție de plane

În spațiu, o dreaptă este unic determinată de intersecția a două plane neparalele și distincte. Cu alte cuvinte, ea poate fi reprezentată de un sistem de forma:

$$\begin{cases} (\pi_1) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ (\pi_2) : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Teorema 2 *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (i) *Intersecția $(\pi_1) \cap (\pi_2)$ este o dreaptă.*
- (ii) *Vectorii normali $\bar{N}_1(a_1, b_1, c_1) \perp (\pi_1)$ și $\bar{N}_2(a_2, b_2, c_2) \perp (\pi_2)$ sunt necoliniari.*
- (iii) *Sistemul (6) este compatibil simplu nedeterminat.*

Demonstrație: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) : Dacă $(\pi_1) \cap (\pi_2)$ este o dreaptă, atunci, $(\pi_1) \nparallel (\pi_2)$, ceea ce implică $\bar{N}_1 \nparallel \bar{N}_2$. Reciproc, dacă $\bar{N}_1 \nparallel \bar{N}_2$, atunci, planele (π_1) și (π_2) nu pot nici să coincidă, nici să fie paralele (deoarece, în ambele cazuri, am avea $\bar{N}_1 \parallel \bar{N}_2$); prin urmare, singura posibilitate rămasă este ca $(\pi_1) \cap (\pi_2)$ să fie o dreaptă.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : Analizăm sistemul liniar (6). Fie

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \end{pmatrix}$$

matricea, respectiv, matricea extinsă a acestuia. Observăm că măcar unul din coeficienții a_1, b_1, c_1 , respectiv, măcar unul din coeficienții a_2, b_2, c_2 trebuie să fie nenul (altminteri, cele două ecuații nu ar reprezenta plane). Prin urmare, întotdeauna avem $\text{rang} A \geq 1$, iar sistemul (6) se află într-una din următoarele situații:

a) *Compatibil simplu nedeterminat*, dacă: $\text{rang} A = 2$, ceea ce este echivalent cu:

$$\bar{N}_2 \neq \alpha \bar{N}_1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{N}_1 \nparallel \bar{N}_2.$$

b) *Compatibil dublu nedeterminat*, dacă: $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = 1$, adică au loc proporționalitățile:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}, \quad (7)$$

(în particular, $\bar{N}_1 \parallel \bar{N}_2$). În acest caz, cele două ecuații ale sistemului se pot obține una din cealaltă prin amplificare cu un scalar, adică, sunt echivalente. Geometric, ele reprezintă același plan.

c) *Incompatibil*, dacă $\text{rang} A = 1$, $\text{rang} \bar{A} = 2$, adică:

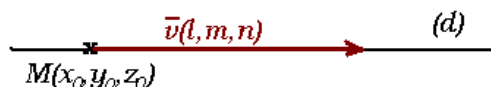
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}; \quad (8)$$

(în particular, $\bar{N}_1 \parallel \bar{N}_2$). În acest caz, cele două ecuații reprezintă două plane paralele.

Din cele de mai sus reiese că: $\bar{N}_1 \nparallel \bar{N}_2 \Leftrightarrow$ sistemul (6) este compatibil simplu nedeterminat.

B. Dreapta determinată de un punct și un vector director

O altă modalitate de a descrie o dreaptă în spațiu este de a preciza un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ pe dreaptă și un vector liber $\bar{v}(l, m, n)$ paralel cu aceasta (sau, echivalent, conținut în dreaptă), numit **vector director** al dreptei.



Un punct arbitrar $P(x, y, z)$ se află pe dreaptă, dacă și numai dacă $\overline{MP}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ este coliniar cu $\bar{v}(l, m, n)$, adică există un $t \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\overline{MP} = t\bar{v}. \quad (9)$$

Scriind ultima relație² în coordonate, obținem **ecuațiile parametrice** ale dreptei:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (10)$$

Eliminând parametrul t din egalitățile (10), obținem două ecuații independente în x, y, z :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad (11)$$

numite **ecuațiile canonice** ale dreptei în spațiu.

Exemplu: Ecuațiile axei Ox . Pe (Ox) cunoaștem punctul $O(0, 0, 0)$ și vectorul $\bar{i}(1, 0, 0)$, de unde rezultă

$$(Ox) : \frac{x - 0}{1} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 0}{0} = t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Observație: Ecuațiile (11) (ca, de altfel, și mai sus, (7), (8)) trebuie înțelese ca relații de proporționalitate, adică, este admisă **formal** scrierea lui 0 la numitor. Aceasta nu înseamnă că vom face împărțire la 0, ci doar este o scriere mai simplă a faptului că numărătorii și numitorii sunt proporționali - adică, numărătorii respectivi sunt și ei nuli. În exemplul de mai sus:

$$(Ox) : x = t, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Dreapta (Ox) poate fi descrisă și ca intersecția planelor (xOy) și (xOz) , adică, $(Ox) : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

²Din (9), observăm că $P \in (d) \Leftrightarrow \overline{MP}$ aparține subspațiului lui $\mathcal{E}_3$ generat de vectorul $\bar{v}$; cu alte cuvinte, dreapta (d) este un subspațiu afin 1-dimensional al lui $\mathcal{A}_3$.

3 Unghiuri și distanțe în spațiul $\mathcal{A}_3$

3.1 Unghiuri

1. **Unghiul dreptelor** (d_1) și (d_2) este unghiul cel mai mic dintre direcțiile vectorilor directori $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ ai celor două drepte. Notând acest unghi cu $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$, găsim:

$$\cos \alpha = \frac{|\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2|}{\|\bar{v}_1\| \cdot \|\bar{v}_2\|}.$$

2. **Unghiul α dintre o dreaptă și un plan** este complementul unghiului dintre direcția vectorului director $\bar{v}$ al dreptei și cea a normalei $\bar{N}$ la plan:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{|\bar{v} \cdot \bar{N}|}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{N}\|}.$$

3. **Unghiul α dintre două plane** este egal cu unghiul cel mai mic dintre direcțiile normalelor $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$:

$$\cos \alpha = \frac{|\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2|}{\|\bar{N}_1\| \cdot \|\bar{N}_2\|}.$$

3.2 Distanțe în spațiu

1. **Distanța dintre două puncte** A și B nu este altceva decât norma vectorului $\overrightarrow{AB}$:

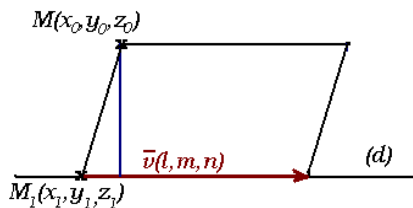
$$dist(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \quad (13)$$

2. **Distanța de la un punct** $M(x_0, y_0, z_0)$ **la o dreaptă**

$$(d) : \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

este egală cu înălțimea în paralelogramul construit pe $\overline{MM_1}$ și $\bar{v}(l, m, n)$ (unde $M_1(x_1, y_1, z_1)$ este un punct pe dreapta (d)):

$$dist(M, d) = \frac{\|\overline{MM_1} \times \bar{v}\|}{\|\bar{v}\|}. \quad (14)$$



3. Distanța de la un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ la un plan

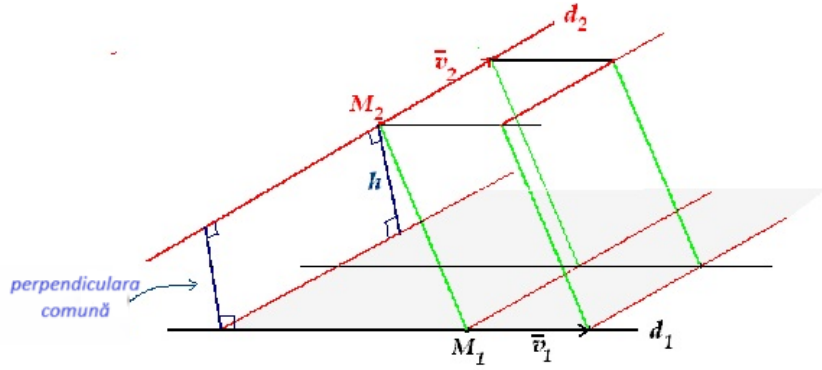
$$(\pi) : ax + by + cz + d = 0$$

este dată de

$$\text{dist}(M, (\pi)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (15)$$

4. **Distanța minimă dintre două drepte necoplanare** este egală cu înălțimea din M_1 în paralelipipedul construit pe vectorii $\overline{M_1M_2}$, $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$, unde M_i și $\bar{v}_i$ sunt puncte, respectiv, vectori situați pe dreptele (d_i) , $i = 1, 2$:

$$\text{dist}((d_1), (d_2)) = \frac{|(\overline{M_1M_2}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)|}{\|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2\|}. \quad (16)$$



Exercițiul 1 Scrieți ecuația planului care: trece prin punctul $A(1, 2, -1)$ și: a) conține axa Oz ; b) este perpendicular pe planele $(\pi_1) : x + y + 2z = 0$ și $(\pi_2) : x - y + 3 = 0$; c) este paralel cu planul (π_1) ; d) face cu axa Oz un unghi de 45° .

Rezolvare: a) Planul căutat conține: punctele A și O (prin urmare, vectorul $\overline{OA}(1, 2, -1)$), vectorul $\bar{k}(0, 0, 1) \subset Oz$ și punctul O . Astfel, ecuația lui este:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0.$$

b) Planul căutat conține punctul A și normalele $\bar{N}_1(1, 1, 2)$ și $\bar{N}_2(1, -1, 0)$ la cele două plane, conducând la ecuația:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 4 = 0.$$

c) Planul căutat și (π_1) au aceeași direcție normală, dată de $\bar{N}_1(1, 1, 2)$; astfel, ecuația lui este:

$$1(x-1) + 1(y-2) + 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 1 = 0.$$

d) Fie $\vec{N}(a, b, c)$ normala la planul (π) căutat. Unghiul $\alpha = \angle(Oz, (\pi))$ este dat de: $\sin \alpha = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{k}|}{\|\vec{N}\| \|\vec{k}\|} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, de unde găsim: $c = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$. Prin urmare, avem o infinitate de soluții, $(\pi) : a(x-1) + b(y-2) \pm \sqrt{a^2 + b^2}(z+1) = 0$.

Exercițiul 2 Scrieți ecuațiile următoarelor drepte: a) dreapta (d) de intersecție a planelor: $(\pi_1) : x - y = 0$ și $(\pi_2) : 2x + z = 1$; b) paralela prin $O(0, 0, 0)$ la (d) .

Rezolvare: a) În primul rând, să observăm că planele (π_1) și (π_2) se intersectează, într-adevăr, după o dreaptă, deoarece normalele lor $\vec{N}_1(1, -1, 0)$ și $\vec{N}_2(2, 0, 1)$ sunt necoliniare. Pentru a determina dreapta $(d) = (\pi_1) \cap (\pi_2)$, rezolvăm sistemul format de cele două ecuații, obținând astfel ecuațiile parametrice $(d) : x = t, y = t, z = -2t + 1$. Eliminând apoi pe t , găsim ecuațiile canonice: $(d) : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

b) Fie (δ) paralela prin O la (d) . Deoarece $(\delta) \parallel (d)$, vectorul director $\vec{v}(1, 1, -2)$ al lui (d) este vector director și pentru (δ) , așa încât avem: $(\delta) : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$.

Exercițiul 3 Determinați parametrii α și β astfel încât dreapta $(d) : \frac{x-\alpha}{1} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$ să fie conținută în planul $(\pi) : x + y + z = 3$.

Rezolvare: Pentru ca dreapta (d) să fie conținută în planul (π) , este necesar și suficient să fie îndeplinite condițiile: (i) vectorul director $\vec{v}(1, \beta, 1)$ al lui (d) să fie perpendicular pe normala $\vec{N}(1, 1, 1)$ la plan, adică: $\vec{N} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 1 + \beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = -2$; (ii) punctul $M(\alpha, 0, 0) \in (d)$ să aparțină lui (π) , adică: $\alpha = 3$.

Exercițiul 4 Fie punctul $M(2, 3, 4)$ și dreapta $(d) : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Determinați: proiecția lui M pe (d) , simetricul lui M față de (d) și distanța de la M la (d) .

Rezolvare: Proiecția M' a lui M pe (d) este intersecția dintre dreapta (d) și planul (π) perpendicular prin M pe (d) (i.e., planul care trece prin M și este perpendicular pe vectorul $\vec{v}(1, 1, 1) \subset (d)$):

$$M' : \begin{cases} (\pi) : 1(x-2) + 1(y-3) + 1(z-4) = 0 \\ (d) : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} =: t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 9 \\ x = t, \quad y = t, \quad z = t \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, găsim $t = 3$, respectiv, $M'(3, 3, 3)$. Pentru a determina simetricul M'' al lui M față de (d) , ținem cont că M' este mijlocul segmentului MM'' , adică: $x_{M'} = \frac{x_M + x_{M''}}{2}$, $y_{M'} = \frac{y_M + y_{M''}}{2}$, $z_{M'} = \frac{z_M + z_{M''}}{2}$. Înlocuind coordonatele lui M , respectiv, M' în aceste relații, găsim $M''(4, 3, 2)$. Distanța de la M la (d) o putem găsi în două moduri, fie ca norma vectorului $\vec{MM'}$, fie cu ajutorul formulei (14); aplicând prima metodă, găsim: $\text{dist}(M, (d)) = \|\vec{MM'}\| = \sqrt{(3-2)^2 + (3-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}$.

Exercițiul 5 Fie punctul $M(2, 4, 3)$ și planul $(\pi) : x + y + 2z = 0$. Determinați: proiecția lui M pe (π) , simetricul lui M față de (π) și distanța de la M la (π) .

Rezolvare: Proiecția M' a lui M pe (π) este intersecția dintre planul (π) și dreapta (δ) perpendiculară prin M pe (π) (astfel, un vector director pentru (δ) este normala $\bar{N}(1, 1, 2)$ a lui (π)):

$$M' : \begin{cases} (\delta) : \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{2} =: t \\ (\pi) : x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 2, & y = t + 4, & z = 2t + 3 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Soluția acestui sistem este $t = -2$, adică, $M'(0, 2, -1)$. Simetricul M'' al lui M față de (π) îl găsim apoi din relațiile: $x_{M'} = \frac{x_M + x_{M''}}{2}$, $y_{M'} = \frac{y_M + y_{M''}}{2}$, $z_{M'} = \frac{z_M + z_{M''}}{2}$, care conduc la: $M''(-2, 0, -5)$. Distanța de la M la (π) o putem găsi din nou, în două moduri, fie ca norma vectorului $\overline{MM'}$, fie cu ajutorul formulei (15); aplicând oricare din aceste două metode, obținem: $\text{dist}(M, (\pi)) = 2\sqrt{6}$.

Exercițiul 6 Determinați: a) dreapta perpendiculară pe Oz și pe $(d) : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$ și care le intersectează pe ambele (perpendiculara comună a celor două drepte); b) dreapta care trece prin $A(1, 2, 3)$ și intersectează pe Oz și (d) .

Rezolvare: Identificăm mai întâi câte un punct și un vector pe fiecare din cele două drepte date: $Oz : O(0, 0, 0), \bar{k}(0, 0, 1)$, respectiv, $(d) : M(2, -1, 0), \bar{v}(1, 3, 4)$. a) Perpendiculara comună

(δ_1) are ca vector director produsul vectorial $\bar{k} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -3\bar{i} + \bar{j}$. Mai mult, (δ_1) se

afă la intersecția dintre planul (π_1) care conține Oz și vectorul $\bar{k} \times \bar{v}$, respectiv, planul (π_2) care conține pe (d) și vectorul $\bar{k} \times \bar{v}$. Astfel: (π_1) conține pe: $O(0, 0, 0), \bar{k}$ și $\bar{k} \times \bar{v}$, iar (π_2) conține pe: $M(2, -1, 0), \bar{v}, \bar{k} \times \bar{v}$, de unde găsim:

$$(\pi_1) : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (\pi_2) : \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (d) : \begin{cases} (\pi_1) : x + 3y = 0 \\ (\pi_2) : 2x + 6y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

b) Dreapta căutată (δ_2) o găsim ca intersecția dintre planul (π_3) care conține pe A și pe Oz (adică, punctul O și vectorii $\overline{OA}(1, 2, 3)$ și $\bar{k}(0, 0, 1)$) și planul (π_4) care conține pe A și (d) (adică, punctul A și vectorii $\overline{AM}(1, -3, -3)$ și $\bar{v}(1, 3, 4)$). Scriind ecuațiile celor două plane cu ajutorul formulei (1), găsim:

$$(\delta_2) : \begin{cases} (\pi_3) : -2x + y = 0 \\ (\pi_4) : 3x + 7y - 6z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Exercițiul 7 Scrieți ecuațiile tuturor planelor: a) paralele cu $(\pi) : ax + by + cz + d = 0$; b) care conțin dreapta $(d) : \begin{cases} P_1 := a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ P_2 := a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ (**fasciculul de plane** care conțin pe (d)).

Rezolvare: a) Planele paralele cu (π) au aceeași direcție normală $\bar{N}(a, b, c)$ cu (π) - adică, aceiași coeficienți ai lui x, y, z ; prin urmare, vor avea ecuații de forma: $(\pi_\lambda) : ax + by + cz + d = \lambda$, unde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. b) Deoarece (d) este o dreaptă, conform Teoremei 2, sistemul $P_1 = 0, P_2 = 0$ este compatibil simplu nedeterminat (cu notațiile din demonstrația teoremei: $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 2$). Un alt plan (π) , dat de ecuația $P := ax + by + cz + d = 0$ conține pe (d) dacă și numai dacă sistemul obținut prin adăugarea ecuației $P = 0$ la acesta este tot compatibil nedeterminat (adică, rangul lui rămâne 2). Aceasta se întâmplă dacă și numai dacă $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât: $P = \alpha P_1 + \beta P_2$.

1 Conice. Definiție și exemple

Prin **secțiune conică** (pe scurt, **conică**), înțelegem o curbă plană descrisă în coordonate carteziene de o ecuație de gradul al doilea:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (*)$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, 3$ și cel puțin unul din coeficienții termenilor de grad doi nu se anulează. Ecuația (*) se numește *ecuația generală a conicelor*. Să vedem, în continuare, câteva exemple.

1.1 Elipsa

Elipsa este definită ca mulțimea punctelor M din plan cu proprietatea ca suma distanțelor lui M la două puncte fixe F, F' , numite *focare*, este o constantă $2a$:

$$\|FM\| + \|F'M\| = 2a. \quad (1)$$

Pentru a deduce ecuația elipsei, vom alege reperul $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ în mod cât mai convenabil, și anume: vom alege drept axă Ox dreapta FF' , orientată de la F' către F , iar originea O o vom alege ca fiind mijlocul segmentului FF' . Astfel, vom avea: $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, unde $c > 0$ este o constantă.

Observație: Din inegalitatea triunghiului deducem că, pentru a avea soluții, M , este necesar ca $a \geq c$; mai mult, cazul când $a = c$ este trivial (în acest caz, $\|FM\| + \|F'M\| = \|FF'\|$, iar M va aparține dreptei FF'), așa încât vom considera în continuare $a > c$.

Fie $M(x, y)$ un punct mobil pe elipsă. Avem: $\|FM\| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$, $\|F'M\| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$, iar relația (1) devine:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a.$$

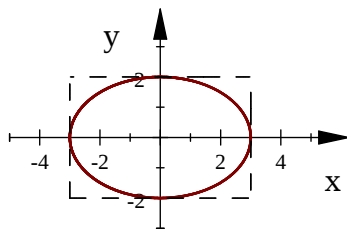
Ridicând la pătrat ambii membri și dezvoltând binoamele la pătrat, găsim:

$$-2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{c^2 + 2cx + x^2 + y^2} + 2cx \Rightarrow cx + a^2 = a\sqrt{c^2 + 2cx + x^2 + y^2}.$$

Ridicând din nou la pătrat, ultima egalitate se rescrie: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$. Deoarece $a > c$, avem: $a^2 - c^2 > 0$, ceea ce ne dă dreptul să notăm: $b^2 := a^2 - c^2$. Împărțind egalitatea de mai sus prin a^2b^2 , obținem:

Propoziția 1 (Ecuația canonică a elipsei): Pentru orice elipsă, există un reper cartezian în plan, în care ecuația acesteia are forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2)$$



elipsa cu $a = 3, b = 2$

Numerele a și b poartă numele de *semi-axa mare*, respectiv, *semi-axa mică* a elipsei. Focarele $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ se află pe axa Ox , având abscisele date de:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Observații:

1. Pentru $a = b = R$, obținem **cercul de centru** $O(0, 0)$ **și rază** $R : x^2 + y^2 = R^2$.
2. Dacă $a < b$, atunci focarele sunt pe axa Oy , mai precis: $F(0, c)$, $F'(0, -c)$, cu $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.
3. Elipsa nu poate fi descrisă ca fiind graficul unei funcții $y = f(x)$. Motivul este faptul că o dreaptă verticală $x = x_0$ nu poate intersecta graficul unei funcții în două puncte (deoarece aceasta ar însemna ca $f(x_0)$ să aibă două valori distincte). Ea este reuniunea graficelor a două funcții $f_{1,2} : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} > 0$, $f_2(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} < 0$.

1.2 Hiperbola

Hiperbola este definită ca locul geometric al punctelor M din plan cu proprietatea că modulul diferenței distanțelor lui M la două puncte fixe F, F' este o constantă $2a$:

$$\left| \left| \overline{MF} \right| - \left| \overline{MF'} \right| \right| = 2a,$$

Alegând reperul xOy ca mai sus, adică, axa Ox ca fiind dreapta FF' orientată de la F' către F , iar O , mijlocul segmentului FF' , avem, din nou, $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, printr-un calcul asemănător cu cel din cazul elipsei, obținem:

Propoziția 2 (Ecuația canonică a hiperbolei): Pentru orice hiperbolă, există un reper cartezian în care ecuația acesteia are forma canonică:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (3)$$

unde $b > 0$ este definit de relația: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

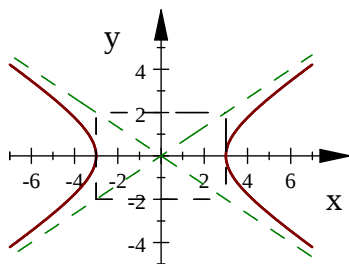
Numerele a și b poartă numele de *semi-axele* hiperbolei.

Observații:

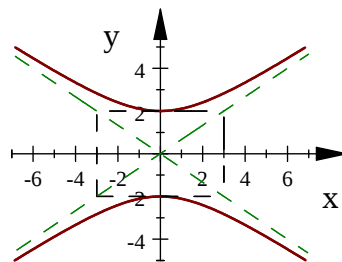
1. Hiperbola admite două asimptote, de ecuații:

$$(a_1) : y = \frac{b}{a}x, \quad (a_2) : y = -\frac{b}{a}x. \quad (4)$$

2. Curba plană $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$ este tot o hiperbolă cu semi-axele a, b și focarele $F(0, c)$, $F'(0, -c) \in Oy$, numită *hiperbola conjugată* lui (3).



hiperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$

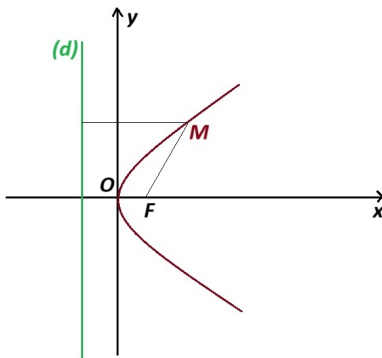


hiperbola $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$

1.3 Parabola

Parabola se definește ca locul geometric al punctelor M din plan cu proprietatea că distanțele lui M la un punct fix, numit *focar* și o dreaptă fixă, numită *directoare*, sunt egale.

Pentru a deduce ecuația canonică a parabolei, notăm cu F focarul și cu (d) directoarea acesteia. Alegând ca axă Ox perpendiculara prin F pe (d) și ca origine, mijlocul segmentului determinat de F și proiecția sa pe (d) , obținem: $F(\frac{p}{2}, 0)$, $(d) : x = -\frac{p}{2}$, unde $p > 0$:



Fie $M(x, y)$ un punct mobil pe parabolă. Definiția acesteia e echivalentă cu:

$$\|FM\| = \text{dist}(M, d).$$

Însă, $\text{dist}(M, d) = \left|x + \frac{p}{2}\right|$, adică: $\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$. Ridicând ambii membri la pătrat și reducând termenii asemenea, obținem:

Propoziția 3 (Ecuația canonică a parabolei): Pentru orice parabolă, există un reper cartezian în care ecuația acesteia are forma

$$y^2 = 2px.$$

Punctul $O(0, 0)$ se numește *vârful* parabolei, iar Ox , axa sa de simetrie.

2 Reducerea la forma canonică a ecuațiilor conicelor

În cele ce urmează, vom arăta că o ecuație de grad 2 în x și y poate descrie geometric doar: o elipsă, o hiperbolă, o parabolă, una dintre *conicele degenerate* (o pereche de drepte, o dreaptă sau un punct), sau mulțimea vidă¹. Mai precis, vom demonstra:

Teorema 4 (Clasificarea izometrică a conicelor): *Fiind dată o conică arbitrară:*

$$(\Gamma) : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (*)$$

într-un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ există o rototranslație $\mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}' := \{O', \bar{i}', \bar{j}'\}$ a reperului astfel încât, în noile coordonate (x', y') , ecuația conicei devine una din următoarele:

- | | |
|--|---|
| 1. Elipsa $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ | 5. Punct dublu $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$ |
| 2. Hiperbola $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ | 6. Reuniunea a două drepte concurente $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$ |
| 3. Parabola $y'^2 = 2px'$ | 7. Reuniunea a două drepte paralele $y'^2 = 1$ |
| 4. Mulțimea vidă $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + 1 = 0$ | 8. Dreaptă dublă $y'^2 = 0$ |
| | 9. Mulțimea vidă $y'^2 = -1$ |

sau una din ecuațiile obținute din 1.-9. prin interschimbarea lui x' cu y' ; acestea poartă numele de ecuațiile **reduse** sau **canonice** ale conicelor.

Înainte de a demonstra Teorema 4, să justificăm interpretarea geometrică a ecuațiilor 5.-8.:

Ecuația 5. este echivalentă cu $x' = 0, y' = 0$, altfel spus, ea reprezintă punctul $O' (x' = 0, y' = 0)$. Numele de punct *dublu* povine din faptul că $x' = 0, y' = 0$ este o rădăcină dublă a ecuației.

Ecuația 6. este echivalentă cu $\left(\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b}\right) \left(\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b}\right) = 0$, adică, cu:

$$\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{x'}{a} - \frac{y'}{b} = 0. \quad (5)$$

Prin urmare, un punct $P(x', y')$ aparține conicei 6. dacă și numai dacă se află pe dreapta $(d_1) : \frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} = 0$ sau pe dreapta $(d_2) : \frac{x'}{a} - \frac{y'}{b} = 0$, adică, $P \in (d_1) \cup (d_2)$. Similar, conica 7. este reuniunea dreptelor paralele $y' = 1$ și $y' = -1$. Ecuația 8. reprezintă ecuația axei $O'x'$.

Demonstrația Teoremei 4: Pentru a reduce ecuația generală (*) la una din ecuațiile canonice, vom proceda în doi pași:

1. Eliminăm (dacă există) termenul în xy ; vom vedea că acest lucru este întotdeauna posibil printr-o schimbare de baze (mai precis, o *rotație*) $\{O, \bar{i}, \bar{j}\} \mapsto \{O, \bar{i}', \bar{j}'\}$.
2. În ecuația obținută la punctul 1 eliminăm (pe cât posibil), termenii de gradul 1, cu ajutorul unei *translații* $\{O, \bar{i}', \bar{j}'\} \mapsto \{O', \bar{i}', \bar{j}'\}$ a reperului într-un punct O' convenabil ales.

¹Numele de (*secțiune*) *conică* provine din faptul că toate aceste curbe (cu excepția reuniunii a două drepte paralele) pot fi obținute prin intersecția unui con circular drept cu plane.

Pasul 1: Eliminarea termenului în xy . Presupunem² $a_{12} \neq 0$ și considerăm forma pătratică $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ (ce conține termenii de grad 2 din ecuația lui (Γ)). În scriere matricială:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow h(X) = X^t A X. \quad (6)$$

Eliminarea termenului în xy este echivalentă cu reducerea lui h la forma canonică $h = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2$, adică, cu diagonalizarea matricii A ; deoarece $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ este o matrice simetrică, știm din Algebra liniară că acest lucru este întotdeauna posibil, prin metoda transformărilor ortogonale:

- Numerele $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sunt valorile proprii ale lui A , adică, soluțiile ecuației caracteristice:

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A = 0. \quad (7)$$

În ipoteza noastră $a_{12} \neq 0$, valorile proprii λ_1, λ_2 sunt întotdeauna distincte; într-adevăr, presupunând $\lambda_1 = \lambda_2$, ar trebui ca discriminantul Δ al ecuației (7) să fie 0, adică: $\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0$, ceea ce implică $a_{12} = 0$, în contradicție cu ipoteza. În particular, multiplicitatea lui λ_1 și λ_2 este $m_{\lambda_i} = m_{\lambda_2} = 1$.

- Deoarece $\lambda_1 \neq \lambda_2$, subspațiile proprii $S_{\lambda_i} = \{X \mid AX = \lambda_i X\}$, $i = 1, 2$, sunt ortogonale, adică, S_{λ_2} este complementul ortogonal al lui S_{λ_1} în spațiul vectorial euclidian $\mathcal{E}_2$. Mai mult, deoarece $0 < \dim S_{\lambda_i} \leq m_{\lambda_i} = 1$, găsim că $\dim S_{\lambda_i} = 1$, $i = 1, 2$. Prin urmare, o bază ortonormată diagonală $\mathcal{B}' = \{\bar{i}', \bar{j}'\}$ pentru A o obținem alegând câte un vector de lungime 1 arbitrar în S_{λ_1} , respectiv, în S_{λ_2} .

- Fie $\bar{v} \in S_{\lambda_1} \setminus \{0\}$ arbitrar și $\bar{i}' := \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$ versorul său. Egalitatea $\|\bar{i}'\| = 1$ implică existența unui $\alpha \in [0, 2\pi)$ astfel încât:

$$\bar{i}' = \cos \alpha \bar{i} + \sin \alpha \bar{j}.$$

Definind apoi $\bar{j}' := -\sin \alpha \bar{i} + \cos \alpha \bar{j}$, observăm că $\bar{j}' \cdot \bar{i}' = 0$, adică, $\bar{j}' \perp \bar{i}'$, de unde rezultă că $\bar{j}' \in S_{\lambda_2}$; mai mult, ținând cont că $\|\bar{j}'\| = 1$, obținem că $\mathcal{B}' = \{\bar{i}', \bar{j}'\}$ reprezintă o bază diagonală ortonormată pentru A .

- Matricea de schimbare a bazelor:

$$S = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (8)$$

este interpretată geometric ca matricea unei rotații de unghi α a axelor de coordonate (și verifică relațiile: $\det S = 1$, $S^{-1} = S^t$). Notând cu $(\tilde{x}, \tilde{y})$ coordonatele în noul reper cartezian $\{O, \bar{i}', \bar{j}'\}$, și cu $\tilde{X} = (\tilde{x}, \tilde{y})^t$ și înlocuind pe (x, y) din relația $X = S\tilde{X}$ în ecuația lui (Γ) , aceasta se va rescrie sub forma:

$$(\Gamma) : \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + 2a'_{13}\tilde{x} + 2a'_{23}\tilde{y} + a'_{33} = 0, \quad (9)$$

unde expresiile exacte ale lui $a'_{13}, a'_{23}, a'_{33} \in \mathbb{R}$ (ce nu le listăm aici explicit) pot fi determinate prin calcul direct.

Convenție: Numerotarea standard a valorilor proprii λ_1, λ_2 este astfel încât semnul lui $\lambda_1 - \lambda_2$ să coincidă cu semnul lui a_{12} .

²Dacă $a_{12} = 0$, trecem direct la Pasul 2.

Pasul 2: Eliminarea termenilor de grad 1. Pentru aceasta, vom încerca să grupăm în (9) binoame de forma:

$$x' := \tilde{x} - \tilde{x}_0, \quad y' = \tilde{y} - \tilde{y}_0, \quad (10)$$

(cu $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ constante), la pătrat. Ecuațiile (10) reprezintă o *translație a reperului* în punctul $O'(\tilde{x} = \tilde{x}_0, \tilde{y} = \tilde{y}_0)$.

- **Cazul 1 (conice cu centru):** $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Forțăm pe λ_1, λ_2 în factor:

$$(\Gamma) : \lambda_1 \left[(\tilde{x})^2 + 2\frac{a'_{13}}{\lambda_1}\tilde{x} + \left(\frac{a'_{13}}{\lambda_1}\right)^2 \right] + \lambda_2 \left[(\tilde{y})^2 + 2\frac{a'_{23}}{\lambda_2}\tilde{y} + \left(\frac{a'_{23}}{\lambda_2}\right)^2 \right] + \left[a'_{33} - \frac{(a'_{13})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{23})^2}{\lambda_2} \right] = 0,$$

ceea ce ne permite să rescriem ecuația (9) ca: $(\Gamma) : \lambda_1 \left(\tilde{x} + \frac{a'_{13}}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(\tilde{y} + \frac{a'_{23}}{\lambda_2} \right)^2 + a''_{33} = 0$,

unde: $a''_{33} = a'_{33} - \frac{(a'_{13})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{23})^2}{\lambda_2}$. Astfel, prin translația

$$x' := \tilde{x} + \frac{a'_{13}}{\lambda_1}, \quad y' = \tilde{y} + \frac{a'_{23}}{\lambda_2}, \quad (11)$$

a reperului în $O'(\tilde{x}_0 = -\frac{a'_{13}}{\lambda_1}, \tilde{y}_0 = -\frac{a'_{23}}{\lambda_2})$ (numit *centrul* conicei), ecuația lui (Γ) se rescrie:

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + a''_{33} = 0. \quad (12)$$

După o eventuală împărțire cu $-a''_{33}$ (dacă $a''_{33} \neq 0$), egalitatea (12) devine una din ecuațiile 1., 2., 4., 5. sau 6.

- **Cazul 2 (conice fără centru):** $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$. Ecuația lui (Γ) este, în acest caz,

$$(\Gamma) : \lambda_2 (\tilde{y})^2 + 2a'_{13}\tilde{x} + 2a'_{23}\tilde{y} + a'_{33} = 0. \quad (13)$$

În acest caz, nu putem grupa un binom $x' = \tilde{x} - x'_0$ la pătrat.

– Dacă $a'_{13} \neq 0$, atunci, putem totuși obține un astfel de binom la puterea 1:

$$(\Gamma) : \lambda_2 \left[(\tilde{y})^2 + 2\frac{a'_{23}}{\lambda_2}\tilde{y} + \left(\frac{a'_{23}}{\lambda_2}\right)^2 \right] + 2a'_{13}\tilde{x} + a'_{33} - \frac{(a'_{23})^2}{\lambda_2} = 0 \Leftrightarrow \quad (14)$$

$$(\Gamma) : \lambda_2 \left[\tilde{y} + \frac{a'_{23}}{\lambda_2} \right]^2 + 2a'_{13} \left[\tilde{x} + \frac{a'_{33}}{2a'_{13}} - \frac{(a'_{23})^2}{2a'_{13}\lambda_2} \right] = 0. \quad (15)$$

În urma translației reperului în punctul $O' \left(\tilde{x} = -\frac{a'_{33}}{2a'_{13}} + \frac{(a'_{23})^2}{2a'_{13}\lambda_2}, \tilde{y} = -\frac{a'_{23}}{\lambda_2} \right)$:

$$x' = \tilde{x} + \frac{a'_{33}}{2a'_{13}} - \frac{(a'_{23})^2}{2a'_{13}\lambda_2}, \quad y' = \tilde{y} + \frac{a'_{23}}{\lambda_2}, \quad (16)$$

ecuația lui (Γ) devine ecuația 3. a unei parabole cu vârful O' :

$$\lambda_2 (y')^2 + 2a'_{13}x' = 0. \quad (17)$$

– Dacă $a'_{13} = 0$, atunci, $\tilde{x}$ este absent din ecuația lui (Γ) :

$$(\Gamma) : \lambda_2 \left[\tilde{y} + \frac{a'_{23}}{\lambda_2} \right]^2 + a'_{33} - \frac{(a'_{23})^2}{\lambda_2} = 0, \quad (18)$$

iar prin translația: $x' = \tilde{x}$, $y' = \tilde{y} + \frac{a'_{23}}{\lambda_2}$ în $O'(\tilde{x} = 0, \tilde{y} = -\frac{a'_{23}}{\lambda_2})$ a reperului, ecuația conice se rescrie

$$(\Gamma) : \lambda_2 (y')^2 + a''_{33} = 0,$$

unde: $a''_{33} = a'_{33} - \frac{(a'_{23})^2}{\lambda_2}$. Aceasta reprezintă una din ecuațiile 7., 8. sau 9.

Cazul când $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ este complet similar, în acest caz, obținem aceleași ecuații (3., 7., 8., 9.), doar cu rolurile lui x' și y' interschimbate, iar situația $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ nu este posibilă, deoarece în acest caz, am avea $A = 0$, adică (Γ) nu ar mai fi o conică.

3 Exerciții

Exercițiul 1 Arătați că tangentele într-un punct $M(x_0, y_0)$ al conicelor de mai jos au ecuațiile obținute prin "dedublarea" ecuațiilor lor (i.e., înlocuind $x^2 \mapsto xx_0, y^2 \mapsto yy_0, x \mapsto \frac{x+x_0}{2}$):

conica	dreapta tangentă
$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$
$(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$
$(P) : y^2 = 2px$	$yy_0 = p(x+x_0)$

Rezolvare: (i) Arătăm că $(d) : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ coincide cu tangenta (tg) în M la (E) . Pe de o parte, ipoteza $M(x_0, y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ implică faptul că $M \in (d)$. Pe de altă parte, panta tangentei o obținem explicitând pe $y = f(x)$ din ecuația elipsei, apoi calculând $m_{tg} = f'(x_0)$; aceasta se poate face cu ajutorul Teoremei funcțiilor implicite:

$$F(x, y) := \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \Rightarrow f'(x_0) = -\frac{F'_x}{F'_y}(x_0, y_0) = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0},$$

(alternativ: calculând $f(x) = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, apoi derivând pe f și folosind $M(x_0, y_0) \in (E) \Rightarrow y_0 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2}$ pentru a elimina radicalul). Observăm că $m_{tg} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} = m_d$; deoarece (d) și (tg) au în comun punctul M , obținem că $(tg) = (d)$. (ii) și (iii) se rezolvă similar.

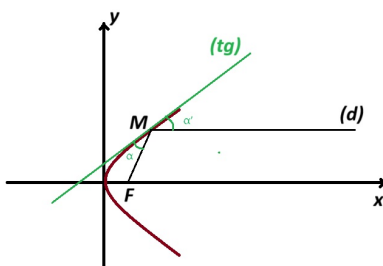
Exercițiul 2 Arătați că hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ are asimptotele $(a_1) : y = \frac{b}{a}x$, $(a_2) : y = -\frac{b}{a}x$.

Rezolvare: Explicitând pe $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ din ecuația hiperbolei, observăm că aceasta este reuniunea graficelor a două funcții $f_{1,2} : (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$, $f_1(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, $f_2(x) = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$. Graficele acestor funcții admit ambele asimptote oblice $(a) : y = mx + n$ atât la $+\infty$, cât și la $-\infty$, unde $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f_i(x)}{x}$, $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f_i(x) - m_i x)$, $i = 1, 2$. Înlocuind pe rând, valorile lui f_1 și f_2 și, respectiv, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$, găsim $m = \pm \frac{b}{a}$, $n = 0$, adică, ecuațiile lui (a_1) și (a_2) .

Exercițiul 3 Fie (P) o parabolă cu focarul F . Arătați că, pentru orice punct $M \in (P)$, unghiul dintre tangenta la (P) în M și MF este egal cu unghiul dintre această tangentă și paralela prin M la axa de simetrie a lui (P) .

Notă: Proprietatea de mai sus se numește **proprietatea optică a parabolei** și este interpretată fizic astfel: Orice rază paralelă cu axa de simetrie a parabolei este reflectată prin focar.

Rezolvare: Fie $(P) : y^2 = 2px$ parabola cu focarul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \in Ox$ și $M(x_0, y_0) \in (P)$ arbitrar:



Unghiurile $\alpha = \angle((tg), MF)$ și $\alpha' = \angle((d), (tg))$ au tangentele: $tg\alpha = \frac{m_{MF} - m_{tg}}{1 + m_{MF}m_{tg}}$, $tg\alpha' = \frac{m_{tg} - m_d}{1 + m_{tg}m_d}$, unde: dreapta tangentă $(tg) : yy_0 = p(x + x_0)$ are panta $m_{tg} = \frac{p}{y_0}$, (d) este paralela la axa de simetrie Ox prin M (și are astfel, panta $m_d = 0$) iar pentru dreapta MF , găsim $m_{MF} = \frac{y_F - y_M}{x_F - x_M} = \frac{-y_0}{\frac{p}{2} - x_0}$. Înlocuind valorile lui m_{MF} , m_{tg} și m_d în $tg\alpha$, $tg\alpha'$ și ținând cont că $y_0^2 = 2px_0$, obținem: $tg\alpha = tg\alpha' = \frac{p}{y_0}$, de unde rezultă $\alpha = \alpha'$.

Exercițiul 4 Fie conica $(\Gamma) : 4xy - 3y^2 + 4x - 14y - 7 = 0$. a) Reduceți ecuația lui (Γ) la forma canonică, recunoașteți și desenați conica. b) Determinați centrul, axele și asimptotele lui (Γ) .

a) *Pasul 1.* Matricea formei pătratice $h(x, y) = 4xy - 3y^2$ asociate lui (Γ) este $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Ecuația caracteristică: $\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$, are rădăcinile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$. Vectorii proprii corespunzători lui $\lambda_1 = 1$ sunt dați de ecuația matricială $AX = 1X$ (unde $X = (x, y)^t$), ceea ce conduce la: $S_{\lambda_1} = \{(2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. O bază în S_{λ_1} este, astfel, $\bar{v} = (2, 1)$, iar o bază

ortonormată în S_{λ_1} este dată de $\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow \vec{v}' = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$, de unde deducem: $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Matricea de schimbare de baze este dată de ecuația (8), de unde găsim:

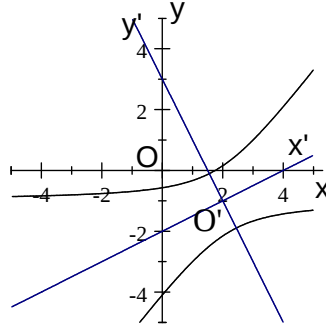
$$S = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad x \stackrel{S}{\Rightarrow} \tilde{X} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\tilde{x} - \tilde{y}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tilde{x} + 2\tilde{y}) \end{cases} \quad (19)$$

Înlocuind aceste valori în ecuația lui (Γ) , obținem: $(\Gamma) : \tilde{x}^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}\tilde{x} - 4\tilde{y}^2 - \frac{32}{\sqrt{5}}\tilde{y} - 7 = 0$.

Pasul 2. Formăm binoame la pătrat în ecuația lui (Γ) :

$$\left(\tilde{x}^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}\tilde{x} + \frac{9}{5} \right) - 4 \left(\tilde{y}^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}\tilde{y} + \frac{16}{5} \right) + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow (\Gamma) : x'^2 - 4y'^2 + 4 = 0,$$

unde $x' := \tilde{x} - \frac{3}{\sqrt{5}}, y' = \tilde{y} + \frac{4}{\sqrt{5}}$. Conica este o hiperbolă cu $a = 1, b = \frac{1}{2}$ și centrul $O' \left(\tilde{x}_0 = \frac{3}{\sqrt{5}}, \tilde{y}_0 = -\frac{4}{\sqrt{5}} \right)$.



b) **Metoda 1:** Centrul O' al conice are coordonatele $\tilde{x}_0 = \frac{3}{\sqrt{5}}, \tilde{y}_0 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$; înlocuind pe $\tilde{x}_0$ și $\tilde{y}_0$ în (19), obținem: $O' (x_0 = 2, y_0 = -1)$. Axele conice sunt $O'x' : y' = 0 \Leftrightarrow \tilde{y} = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ și $O'y' : x' = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Apoi, folosind transformarea inversă lui (19), adică: $\tilde{X} = S^{-1}X = S^t X \Leftrightarrow \tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y), \tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x + 2y)$ și înlocuind în ecuațiile lui $O'x'$, respectiv, $O'y'$, găsim: $O'x' : x - 2y - 4 = 0, O'y' : 2x + y - 3 = 0$. Procedând similar, ecuațiile asimptotelor: $(a_1) : y' = \frac{1}{2}x', (a_2) : y' = -\frac{1}{2}x'$ devin, în coordonatele (x, y) : $(a_1) : 4x - 3y - 11 = 0, (a_2) : y + \frac{2}{5} = 0$.

Metoda 2: Centrul $O' (x_0, y_0)$ se poate găsi direct și din ecuația generală (*) a unei conice, coordonatele lui fiind date de sistemul: $O' : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$. Axele sunt dreptele care trec prin O' , de pante $m_{1,2}$ date de: $a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0$, iar asimptotele sunt dreptele prin O' , cu pantele date de ecuația $a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0$.

IV. INFORMATICĂ

1. Metoda Divide-et-Impera

- Conceptele tehnicii
- Algoritmi concreti: quicksort (oricare algoritm pentru pivot), mergesort, cautarea binare
- Complexitatea algoritmilor indicati

2. Heap-uri si cozi de prioritate:

- definitie heap, proprietati, heap-max/heap-min
- operatii de adaugare a unui element, extragerea elementului maxim, respectiv minim (in functie de tipul heap-ului) dintr-o coada de prioritati organizate ca heap
- complexitatea operatiilor pe heap (coada de prioritati)
- exemple corecte versus incorecte de heap
- algoritmul heap-sort

3. Arbori binari. Arbori binari cautare

- definitie arbore binar de cautare si proprietati
- notiunile de radacina, frunza, fiu, frate, parinte
- parcurgeri in latime si in adancime (preordine, inordine, postordine)
- exemple corecte
- inaltime minima / maxima a unui arbore cu n noduri
- numar minim / maxim de chei intr-un arbore de inaltime h
- operatia de insertie in arborele binar de cautare
- cautarea unei chei
- complexitatea operatiilor

Bibliografie minimală:

- [1.] Cormen T.H, Leiserson C.E, Rivest R., Clifford S. „Intorduction to Algorithms” fourth Edition, MIT Press 2022

Metoda Divide-et-Impera

Conceptele tehnicii

Metoda Divide-et-Impera este o tehnică algoritmică fundamentală care presupune împărțirea unei probleme complexe în subprobleme mai mici, rezolvarea acestora independent și combinarea soluțiilor pentru a obține soluția problemei inițiale. Această metodă este utilizată pe scară largă datorită eficienței sale în reducerea complexității problemelor.

Pașii principali ai metodei sunt:

1. **Divide:** Împărțirea problemei în una sau mai multe subprobleme mai mici.
2. **Solve:** Rezolvarea subproblemelor, de obicei recursiv.
3. **Combine:** Combinarea soluțiilor subproblemelor pentru a obține soluția finală.

1 Algoritmul Quicksort

Quicksort este un algoritm de sortare eficient care folosește metoda Divide-et-Impera.

Pseudocod

Algorithm 1 Algoritmul Quicksort

```
1: procedure QUICKSORT( $A, low, high$ )
2:   if  $low < high$  then
3:      $pivot \leftarrow \text{PARTITION}(A, low, high)$ 
4:     QUICKSORT( $A, low, pivot - 1$ )
5:     QUICKSORT( $A, pivot + 1, high$ )
6:   end if
7: end procedure
```

Algorithm 2 Funcția Partition pentru Quicksort

```
1: function PARTITION( $A, low, high$ )
2:    $pivot \leftarrow A[high]$ 
3:    $i \leftarrow low - 1$ 
4:   for  $j \leftarrow low$  to  $high - 1$  do
5:     if  $A[j] \leq pivot$  then
6:        $i \leftarrow i + 1$ 
7:       swap ( $A[i], A[j]$ )
8:     end if
9:   end for
10:  swap ( $A[i + 1], A[high]$ )
11:  return  $i + 1$ 
12: end function
```

Analiza complexității

Complexitatea algoritmului Quicksort depinde de alegerea pivotului:

- **Cazul mediu:** $O(n \log n)$
- **Cazul cel mai bun:** $O(n \log n)$ (pivotul împarte lista în mod egal)
- **Cazul cel mai rău:** $O(n^2)$ (pivotul este mereu cel mai mic sau cel mai mare element)

2 Algoritmul Mergesort

Mergesort este un algoritm de sortare stabil care folosește metoda Divide-et-Impera.

Pseudocod

Algorithm 3 Algoritmul Mergesort

```
1: procedure MERGESORT( $A$ )
2:   if length( $A$ ) > 1 then
3:      $mid \leftarrow \lfloor \text{length}(A)/2 \rfloor$ 
4:      $L \leftarrow A[0 : mid]$  ▷ copie a șirului  $A$  de la 0 la  $mid$ 
5:      $R \leftarrow A[mid : \text{length}(A)]$  ▷ copie a șirului  $A$  de la  $mid$  la length( $A$ )
6:     MERGESORT( $L$ )
7:     MERGESORT( $R$ )
8:     MERGE( $A, L, R$ )
9:   end if
10: end procedure
```

Algorithm 4 Procedura Merge pentru Mergesort

```
1: procedure MERGE( $A, L, R$ )
2:    $i \leftarrow 0, j \leftarrow 0, k \leftarrow 0$ 
3:   while  $i < \text{length}(L)$  and  $j < \text{length}(R)$  do
4:     if  $L[i] \leq R[j]$  then
5:        $A[k] \leftarrow L[i]$ 
6:        $i \leftarrow i + 1$ 
7:     else
8:        $A[k] \leftarrow R[j]$ 
9:        $j \leftarrow j + 1$ 
10:    end if
11:     $k \leftarrow k + 1$ 
12:  end while
13:  while  $i < \text{length}(L)$  do
14:     $A[k] \leftarrow L[i]$ 
15:     $i \leftarrow i + 1$ 
16:     $k \leftarrow k + 1$ 
17:  end while
18:  while  $j < \text{length}(R)$  do
19:     $A[k] \leftarrow R[j]$ 
20:     $j \leftarrow j + 1$ 
21:     $k \leftarrow k + 1$ 
22:  end while
23: end procedure
```

Analiza complexității

Complexitatea algoritmului Mergesort este:

- **Cazul mediu și cel mai bun:** $O(n \log n)$
- **Cazul cel mai rău:** $O(n \log n)$
- **Spațiu suplimentar:** $O(n)$ (pentru array-urile temporare)

3 Algoritmul Căutării Binare

Căutarea binară este un algoritm eficient pentru găsirea unui element într-o listă sortată.

Pseudocod

Algorithm 5 Algoritmul Căutării Binare

```
1: function BINARYSEARCH( $A, target$ )
2:    $low \leftarrow 0$ 
3:    $high \leftarrow \text{length}(A) - 1$ 
4:   while  $low \leq high$  do
5:      $mid \leftarrow \lfloor (low + high)/2 \rfloor$ 
6:     if  $A[mid] = target$  then
7:       return  $mid$ 
8:     else if  $A[mid] < target$  then
9:        $low \leftarrow mid + 1$ 
10:    else
11:       $high \leftarrow mid - 1$ 
12:    end if
13:  end while
14:  return  $-1$  ▷ Elementul nu a fost găsit
15: end function
```

Analiza complexității

Complexitatea algoritmului Căutării Binare este:

- **Cazul mediu și cel mai bun:** $O(\log n)$
- **Cazul cel mai rău:** $O(\log n)$
- **Condiție:** Lista trebuie să fie sortată înainte de căutare

Heap. Coadă de priorități

1 Heap

Definiție: Un heap binar este un arbore binar complet - fiecare nod intern are exact doi descendenți, cu excepția eventual a ultimului nod intern de pe penultimul nivel, iar frunzele se află doar pe ultimele două niveluri, frunzele de pe ultimul nivel sunt ordonate de la stânga spre dreapta - memorat cu ajutorul unui tablou unidimensional (vector) - *array*. În plus există o ordonare a cheilor într-un heap binar, determinată de tipul heap-ului.

H:

16	14	10	8	7	9	3	2	4	1
----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

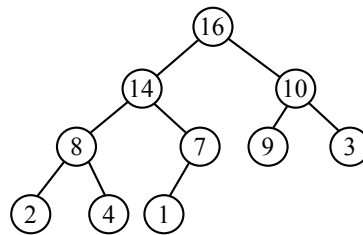


Figura 1: Exemplu de heap-max

1. **Max-heap:** informația din fiecare nod este mai mare decât informația din oricare descendent al său. Maximul din heap se află în rădăcină (fig. 1).
2. **Min-heap:** informația din fiecare nod este mai mică decât informația din oricare descendent al său. Minimul din heap se află în rădăcină.

Pentru implementare se poate utiliza structura heap H în care *size* - numărul de chei din Heap. Rădăcina heap-ului se află pe prima poziție a heapului $H[0]$. Pentru fiecare nod aflat pe poziția i :

- Părintele se află pe poziția $(i - 1)/2$.
- Fiul stâng se află pe poziția $2 * i + 1$.
- Fiul drept se află pe poziția $2 * i + 2$.

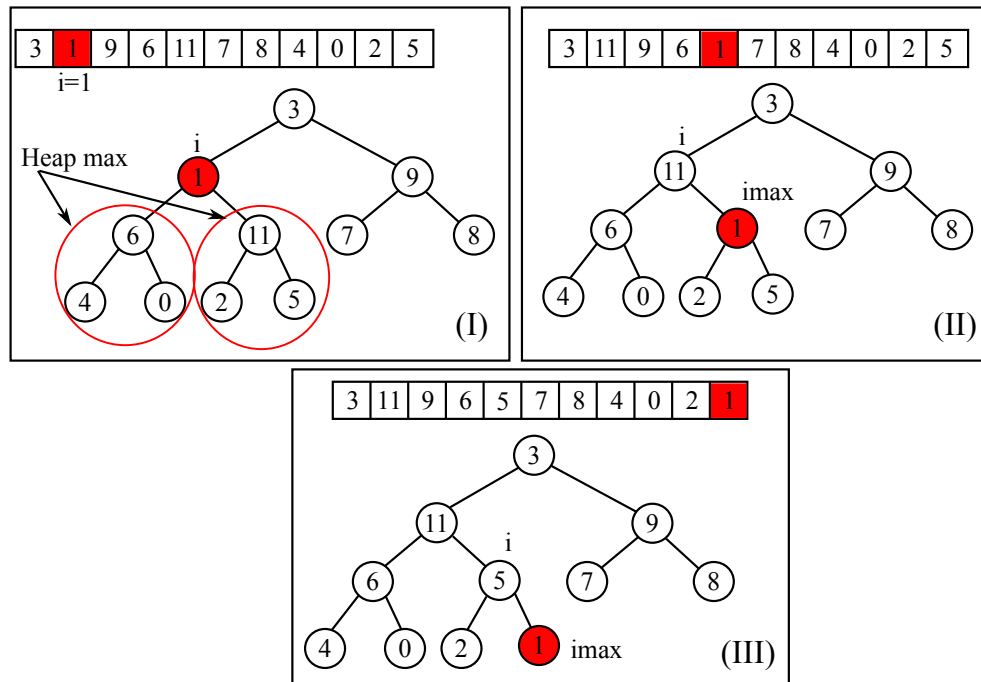


Figura 2: Funcția MAX_HEAP pornește în acest exemplu de la nodul i marcat cu roșu în fig. (I). Cei doi subarbori ai săi sunt heap-max. Funcția are două apeluri recursive, ilustrate în etapele (II) și (III).

Observații:

- În cazul în care se începe în vectorul care stochează elementele heap-ului cu indicii de la 1, relațiile de mai sus se schimbă, și anume:
 - Părintele se află pe poziția $i/2$.
 - Fiul stâng se află pe poziția $2 * i$.
 - Fiul drept se află pe poziția $2 * i + 1$.
- Înălțimea arborelui care reprezintă heap-ul este $\log_2 n$ unde $n = H.size$ este numărul de noduri din heap.
- Complexitatea operațiilor de bază este proporțională cu înălțimea arborelui, adică $O(\log_2 n)$.

Construcția unui heap - max

Considerând un vector de elemente, pentru transformarea acestuia într-un heap-max sunt necesare două etape, reprezentate prin funcțiile:

- **MAX_HEAP(H, i):** în care H heap cu $H.size$ elemente și i indicele din vector a nodului de la se începe. Premiza este aceea că subarborii nodului i sunt heap-max și doar informația din nodul i strică eventual această proprietate. Funcția

MAX_HEAP reface proprietatea de heap-max. Această funcție se întâlnește în literatură și sub denumirea *Sift-Down*.

- **CONSTR_HEAP**(H): pe baza funcției **MAX_HEAP** se construiește heap-ul.

Algoritm: MAX-HEAP

Intrare: Un heap H cu numărul de elemente $size$, poziția i

$st \leftarrow 2 * i + 1$

$dr \leftarrow 2 * i + 2$

$imax = i$

daca $st < H.size$ **si** $H[st] > H[imax]$ **atunci**

$imax = st$

sfarsit_daca

daca $dr < H.size$ **si** $H[dr] > H[imax]$ **atunci**

$imax = dr$

sfarsit_daca

daca $imax \neq i$ **atunci**

$H[i] \leftrightarrow H[imax]$

MAX-HEAP($H, imax$)

sfarsit_daca

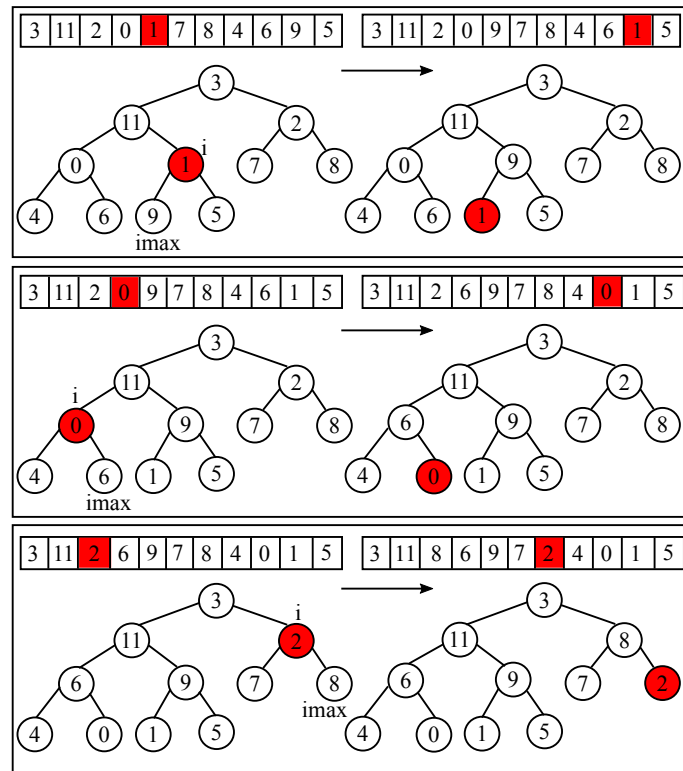


Figura 3: Funcția **CONSTR_HEAP** pornește în acest exemplu de la nodul de pe poziția a 5-a în heap-ul H , primul nod din dreapta vectorului ce are descendenți. Apoi se continuă cu nodurile de pozițiile 4 și 3.

În figurile 3 și 4 este ilustrată funcționarea acestui algoritm.

Complexitate: Algoritmul pornește de la nodul i și ajunge în cel mai defavorabil caz la o frunză, deci complexitatea depinde de înălțimea arborelui care este $h = \log_2 n$. Deci $T(n) = O(\log_2 n)$.

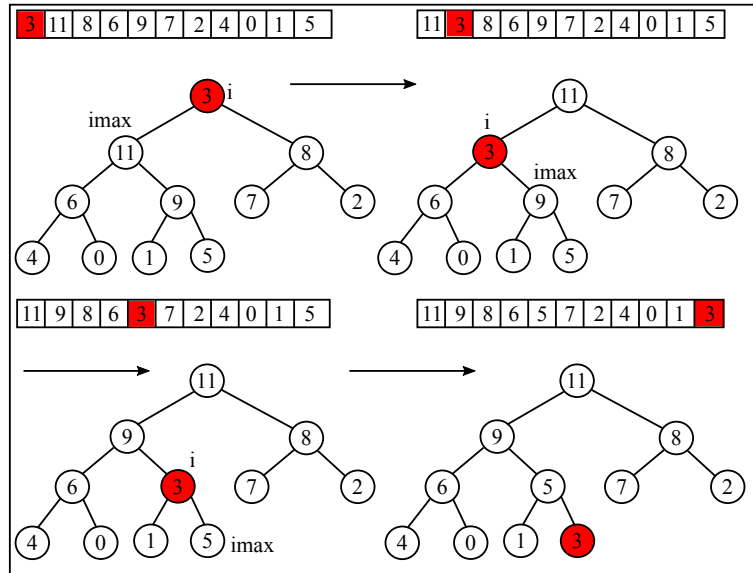


Figura 4: Funcția MAX_HEAP continuă de la poziția 2, la care însă nu sunt necesare modificări. Nodul cu cheia 11 satisface proprietatea de max-heap relativ la descendenții săi, astfel ca se trece la nodul de pe poziția 1. În final se obține un heap-max.

Se observă faptul că frunzele sunt heap-max. Atunci e suficient să pornim de la primul nod intern - pornind de la dreapta heap-ului H , adică primul care are cel puțin un descendent. Nodul respectiv se află pe poziția $H.size/2 - 1$, iar copiii săi sunt frunze, deci heap-max. Se aplică funcția de MAX_HEAP pentru nodul $H.size/2 - 1$, după care se trece la nodul precedent din vector și așa mai departe, până la rădăcină.

Algoritm: CONSTR_HEAP

Intrare: Un heap H cu $size$ elemente
pentru $i = size/2 - 1, 0, -1$ **executa**
 | MAX-HEAP(H, i)
sfarsit_for

În figura 4 este ilustrat procedeul de construcție a unui heap max.

Complexitate: fiecare apel al funcției MAX_HEAP are complexitatea $O(\log_2 n)$.

CONSTR_HEAP efectuează $O(n)$ astfel de apeluri. Deci $T(n)$, unde prin T am notat complexitatea, pentru funcția CONSTR_HEAP este mărginită superior de $n \log_2 n$. Se demonstrează în literatură faptul că funcția are complexitate liniară, adică $T(n) = O(n)$, $n = H.size$.

2 Algoritmul de sortare *HeapSort*

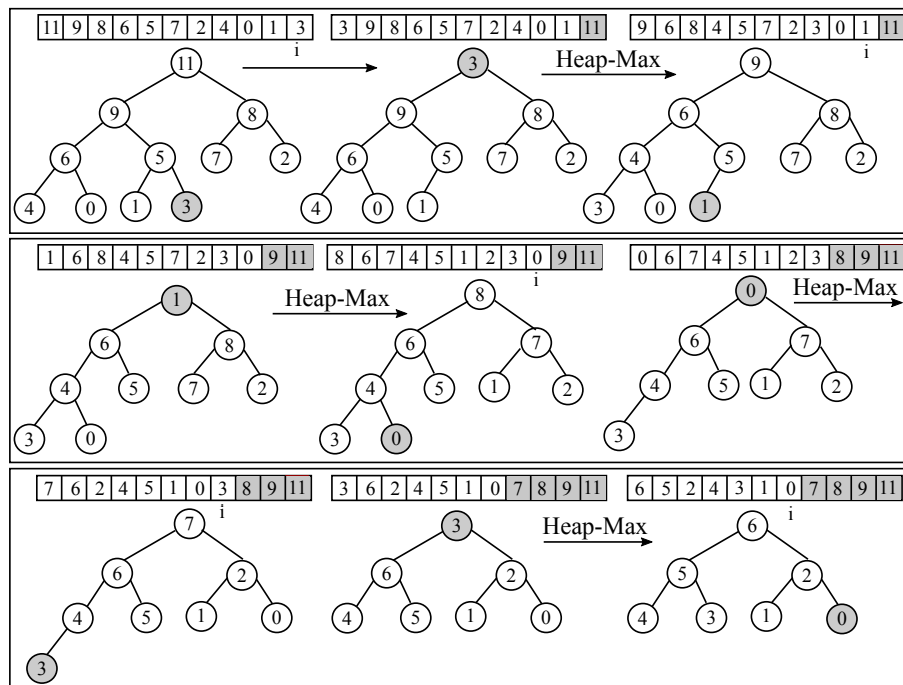


Figura 5: Algoritmul Heapsort.

Se observă faptul că într-un heap-max elementul maxim este plasat în rădăcina arborelui corespunzător, deci pe prima poziție din vectorul date. În vectorul sortat crescător, elementul maxim trebuie să se afle pe ultima poziție. Astfel vectorul poate fi sortat prin următorul algoritm: se interschimbă primul element din vectorul heap-ului cu ultimul. Se reduce dimensiunea heap-ului, apoi se reface proprietatea de heap-max aplicând funcția MAX_HEAP începând din vârful heap-ului. Procedura se reia pentru acest heap redus.

Algoritm: Heapsort

Intrare: Un vector v cu n

Construiește heap-ul H cu funcția BUILD-MAX-HEAP

$size \leftarrow n$

pentru $i = n - 1, 1, -1$ **executa**

$H[i] \leftrightarrow H[0]$

$H.size \leftarrow H.size - 1$

 Max-Heapfy($H, 0$)

sfarsit_for

În figurile 5 și 6 este ilustrată funcționarea algoritmului Heapsort.

Complexitate:

- apelul funcției CONSTR_HEAP este $O(n)$
- apelul pentru MAX_HEAP este $O(\log_2 n)$

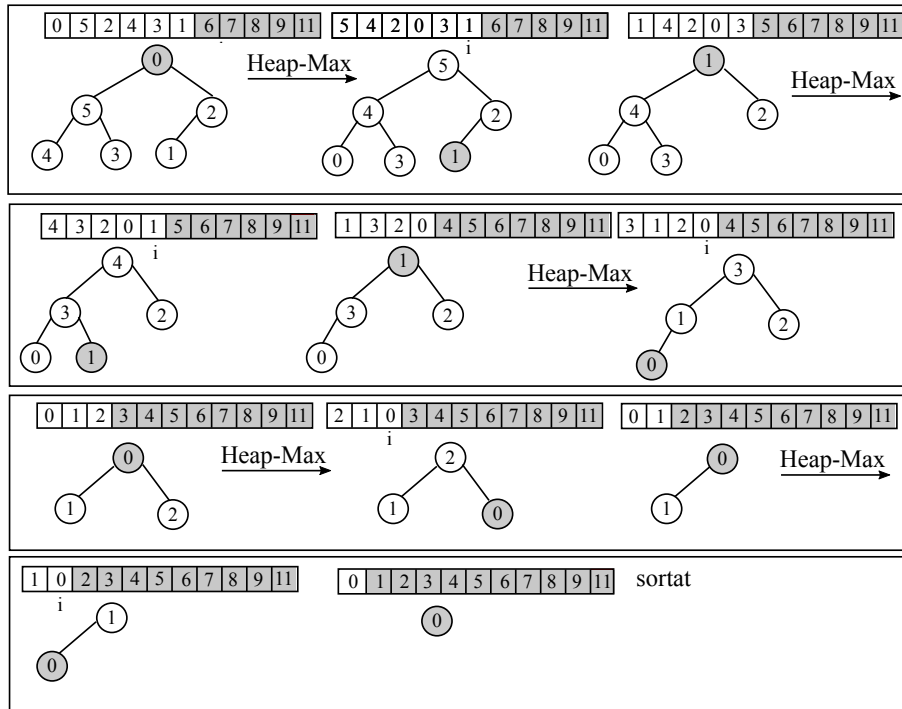


Figura 6: Algoritmul Heapsort.

- funcția MAX_HEAP se apelează de $n - 1$ ori

Rezultă $T(n) = O(n \log_2 n)$.

3 Coadă de priorități

Definiție: O coadă de prioritate este o structură de date utilizată pentru păstrarea unei mulțimi dinamice de date S în care fiecărui element i se asociază o valoare numită *prioritate*. Pentru gestionarea eficientă a cozilor de prioritate se utilizează heap-uri. Există cozi de max-prioritate - heap-max - și cozi de min-prioritate - heap-min.

În continuare vom considera cozi cu max-prioritate.

Operații în cozi de prioritate (max-heap):

- Inserția unui element nou
- Determinarea elementului de prioritatea maximă
- Extragerea elementului de prioritate maximă
- Creșterea priorității unui element

Utilizare: Cozile de prioritate pot fi utilizate pentru gestionarea proceselor pe un calculator. La fiecare moment se execută procesul de prioritate maximă. Procese noi se

pot insera în coadă.

Alt exemplu de aplicație este în implementarea unor algoritmi de căutare informată (Dijkstra, A^*).

1. Determinarea elementului cu prioritate maximă: acesta se află în nodul rădăcină al heap-max:

Algorithm: PRIORITY-MAX

RETURN $H[0]$

Complexitate: $O(1)$

2. Extragerea maximului: Se plasează ultimul element din heap pe prima poziție, se scade dimensiunea heap-ului cu o unitate iar apoi se reface heap-ul prin apelul MAX_HEAP.

Algorithm: PRIORITY-EXTRACT-MAX

Intrare: un heap cu câmpurile H și $size$

$H[0] \leftarrow H[H.size - 1]$

$H.size \leftarrow H.size - 1$

Max-Heapfy($H, 0$)

Complexitate: $O(\log_2 n)$ - se aplică o singură dată MAX_HEAP.

În figura 7 este prezentat un exemplu pentru extragerea maximului.

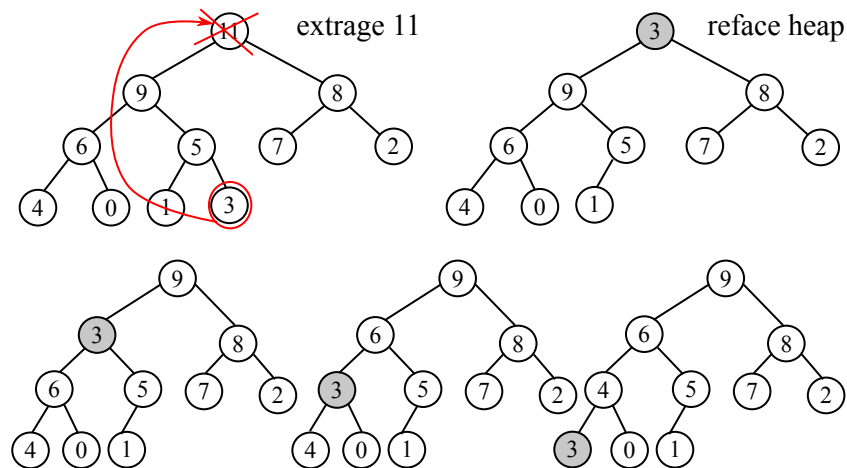


Figura 7: Extragerea maximului.

3. Creșterea priorității elementului de pe poziția i . Prin această modificare este posibil să se strice proprietatea de heap-max, deoarece s-ar putea ca noua valoare a elementului de pe poziția i să fie mai mare decât a părintelui său. Pentru aceasta se merge

din părinte în părinte către rădăcină, până se găsește o poziție potrivită pentru noua valoare. Algoritmul următor este cunoscut în literatură și sub denumirea de *Sift-Up*.

Algoritm: INCREASE-PRIORITY

Intrare: poziția i , valoarea val cu care se modifică elementul $H[i]$

daca $val > H[i]$ **atunci**

$H[i] \leftarrow val$

$p \leftarrow (i - 1)/2$

cat timp $i > 0$ **si** $H[p] < val$ **executa**

$H[i] \leftarrow H[p]$

$i \leftarrow p$

$p \leftarrow (i - 1)/2$

sfarsit_cat_timp

$H[i] \leftarrow val$

sfarsit_daca

Complexitate: $O(\log_2 n)$ - se pornește de la o frunză către rădăcină și deci complexitatea depinde de înălțimea arborelui.

În figura 8 este prezentat un exemplu pentru creșterea priorității.

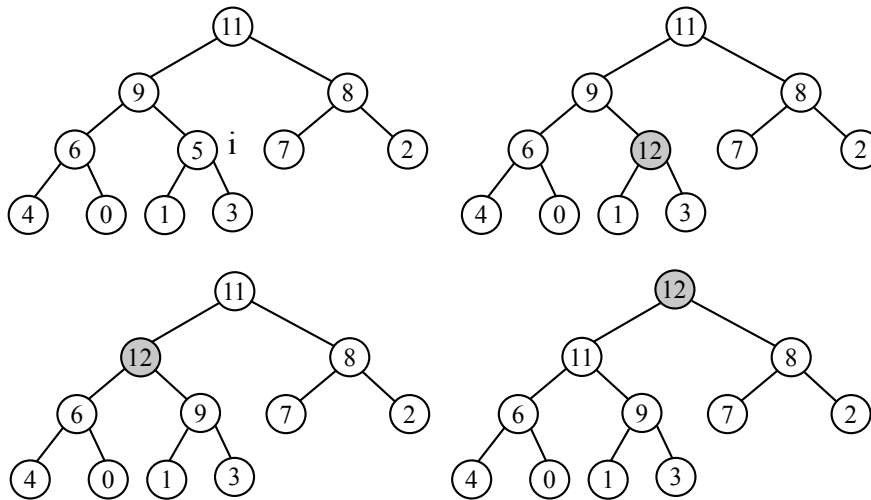


Figura 8: Creșterea priorității nodului cu cheia 5 la valoarea 12.

4. Inserția unui element nou într-un max-heap: se mărește dimensiunea heap-ului, se plasează noul element pe ultima poziție cu prioritatea considerată 0 și apoi se aplică funcția CP_CRESTE_PRIORITATE pentru acest nou element cu valoarea priorității asociate.

Algorithm: PRIORITY-INSERT

Intrare: elementul val , care se inserează în coadă

$H[H.size] \leftarrow 0$

$H.size \leftarrow H.size + 1$

Increase-Priority(H , $H.size - 1$, val)

Complexitate: $O(\log_2 n)$ - se pornește de la o frunză către rădăcină și deci complexitatea depinde de înălțimea arborelui.

Observații:

- Pe un max-heap se pot implementa cu complexitatea $O(\log_2 n)$ operații cu cozi de prioritate.
- Construcția unui heap-max, care s-a făcut prin apelarea funcției MAX_HEAP, se poate realiza și prin inserții succesive ale nodurilor în heap.

Arbori

1 Arbori oarecare

În informatică un arbore este o structură ierarhică de noduri, conectate între ele. Într-un arbore:

- Unul dintre noduri se numește **rădăcină**.
- Nodurile sunt conectate între ele într-o relație ierarhică părinte - fiu. În această structură ierarhică se consideră ordonate nodurile pe niveluri. Pe primul nivel (nivelul 0) se află rădăcina. Pe fiecare nivel $k + 1$ se află fiii nodurilor de pe nivelul k , unde fiii unui nod x de pe nivelul k sunt acele noduri de pe nivelul $k + 1$ care sunt conectate de x printr-o muchie. Pentru aceste noduri x este **părintele / tatăl**. De obicei orientarea muchiei este de la părinte spre fii (*out-tree*), dar există și arbori în care orientarea este invers (*in-tree*). Orice nod are un părinte cu excepția rădăcinii.
- Orice nod poate avea 0 sau mai mulți fii. Fiii aceluiasi nod se numesc **fratî**. În plus niciun nod nu împarte vreun fiu cu alt nod.
- Orice nod care nu are niciun fiu se numește **frunză**. Un nod care nu este frunză se numește **nod intern**.
- Se numește **strămoș / ascendent** al unui nod x un nod y la care pot ajunge de la x urcând din părinte în părinte. Se numește **urmaș / descendent** al lui x un nod y la care pot ajunge printr-o succesiune de fii.

Un exemplu de arbore este prezentat în fig. 1. În acest arbore rădăcina este nodul cu cheia 21. Frunzele sunt nodurile cu cheile 3, 37, 7, 4, 19 și 0. Nodul cu cheia 9 este un strămoș al nodului cu cheia 37, iar nodul cu cheia 3 este un urmaș al nodului cu cheia 9.

Din punct de vedere al grafurilor, un arbore este un graf conex fără cicluri.

Un arbore se reprezintă ierarhic pe niveluri. De obicei se consideră că rădăcina se află pe nivelul 0.

Definiție - adâncimea / înălțimea unui arbore: Lungimea drumului de la rădăcina r la un nod x se numește adâncimea nodului x . Adâncimea rădăcinii este 0.

Lungimea celui mai lung drum de la x la o frunză se numește *înălțime* și se notează prin $h(x)$.

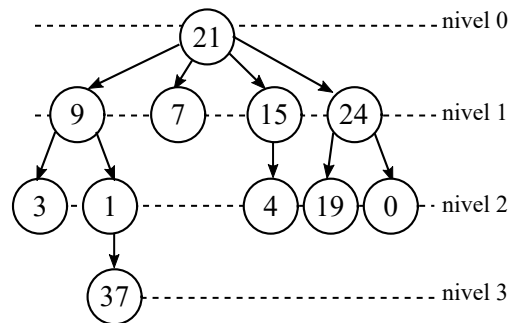


Figura 1: Arbore în reprezentarea ierarhică pe niveluri.

Exemplu: Considerând arborele din figura 1 adâncimea nodului 1 este 2 iar înălțimea este 1. Înălțimea unei frunze este 0. **Atenție:** există documentații în care înălțimea unei frunze este considerată egală cu 1.

Definiție - subarbore: Se numește *subarbore de rădăcină x* al unui arbore, arborele format din nodul x împreună cu toți descendenții săi (fig. 2).

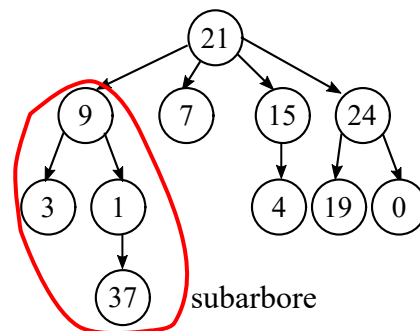


Figura 2: În arborele din figură nodurile cuprinse în marcajul roșu formează un subarbore, care are drept rădăcină nodul cu cheia 9

Arbori n -ari - definiții

- Se numește **arbore n -ar** un arbore pentru care fiecare nod are cel mult n fii.
- Un arbore n -ar se numește *arbore plin*, dacă fiecare nod intern are exact n fii.
- Un arbore n -ar se numește *arbore perfect*, dacă dacă fiecare nod intern are exact n fii și toate frunzele au aceeași adâncime.
- Un arbore n -ar se numește *complet*, dacă toate nodurile interne, cu excepția eventual a celor de pe penultimul nivel, au exact n descendenți, iar nodurile de pe ultimul nivel sunt așezate cel mai la stânga posibil pe nivelul respectiv.

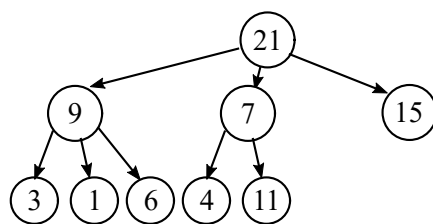


Figura 3: Arbore complet.

În figura 3 este reprezentat un arbore complet.

Definiție - Arbore binar: Un arbore binar este un arbore în care fiecare nod are cel mult doi descendenți direcți. Atunci când fiecare nod are 0 sau 2 fii, arborele se numește *arbore binar strict*. În cazul unui arbore binar un nod are un *fiu stâng* și un *fiu drept*.

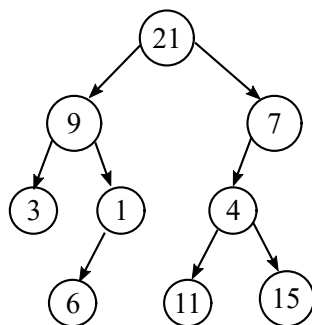


Figura 4: Arbore binar.

1.1 Reprezentarea arborilor

Reprezentare secvențială - se pretează în cazul arborilor compleți.

Un arbore n -ar complet de rădăcină r poate fi memorat într-un tablou unidimensional - *array* - în care pe poziția 0 se află rădăcina, pe următoarele n poziții se află fiii rădăcinii și în general pentru un nod oarecare aflat pe poziția i fiul al k -lea, $1 \leq k \leq n$ se află pe poziția $n * i + k$.

Reprezentare mixtă (pentru arbori binari)

Reprezentarea mixtă utilizează 3 vectori. Primul - *INFO* - conține informațiile din noduri, al doilea - *left* - are pe poziția i indicele fiului stâng al nodului i - în vectorul *INFO* -, iar vectorul al treilea - *right* - are pe poziția i indicele fiului drept al nodului i .

Pentru exemplul din fig. 6 a) reprezentarea mixtă este dată prin vectorii din tabelul din figura 6 b).

Reprezentare cu ajutorul unei structuri de noduri

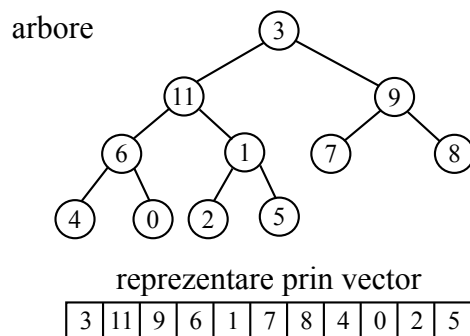


Figura 5: Arbore binar complet memorat într-un vector.

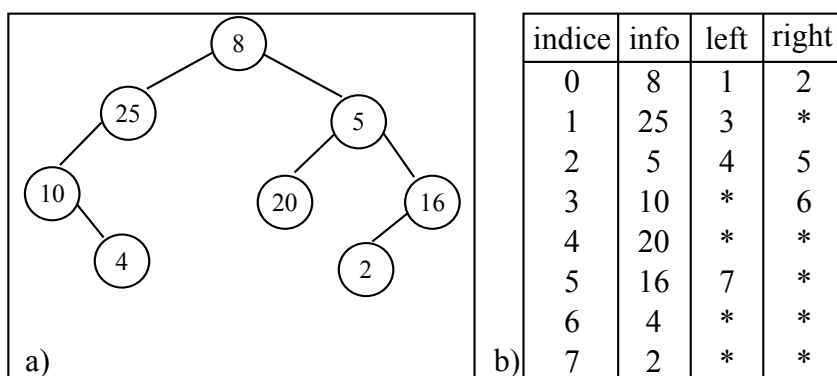
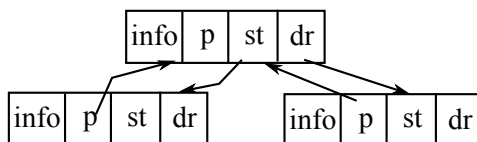


Figura 6: a) Arbore binar. b) Tabela de alocare mixtă.

- **Pentru un arbore oarecare** (nu binar): pentru fiecare nod se utilizează o structură în care se reține informația, legătura către o listă / vector de descendenți direcți și (eventual) legătura către nodul părinte.
- Pentru un arbore binar: fiecare nod este reprezentat printr-o structură în care se reține informația, legătura către fiul stâng, legătura către fiul drept și legătura către părinte.



- Pornind de la reprezentarea unui arbore binar, se poate utiliza pentru arbori oarecare o structură asemănătoare, în care se păstrează informația, o legătură - fiu - către cel mai din stânga fiu și o legătură - frate - către primul frate din dreapta al nodului, precum și o legătură către părinte. Acest lucru este reprezentat grafic în figura 7.

1.2 Parcurgerea arborilor

Există două moduri generale de parcurgere a arborilor oarecare:

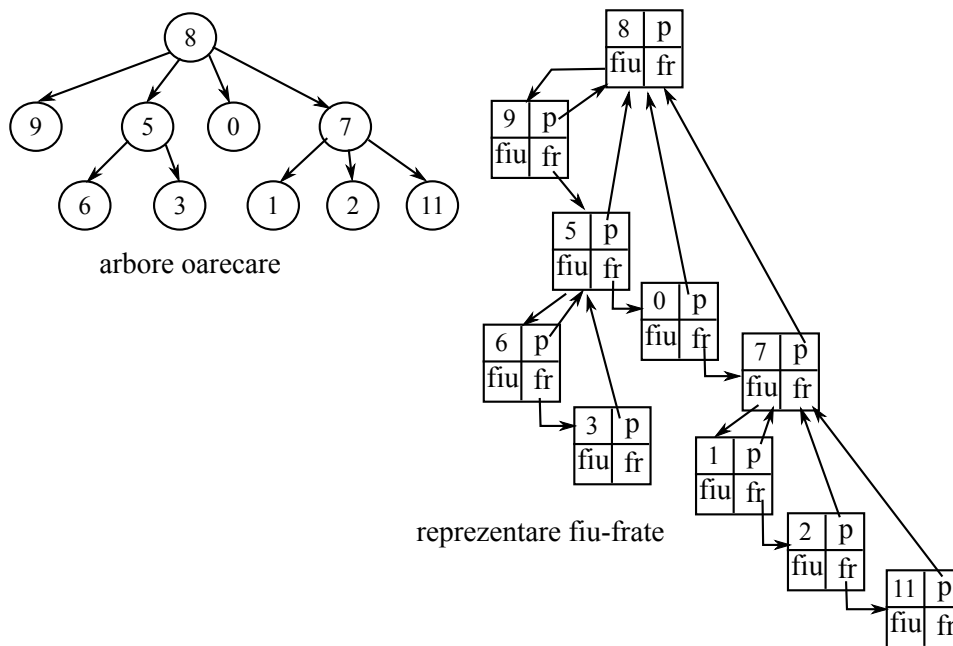


Figura 7: Arbore binar reprezentat printr-o structură de tip fiu-frate.

- Parcurgerea în lățime:
 - presupune parcurgerea pe rând a fiecărui nivel de la stânga spre dreapta.
 - se poate realiza practic utilizând o coadă C :
- Parcurgerea în adâncime (preordine):
 - În cazul parcurgerii în adâncime, fiii unui nod sunt vizitați tot de la stânga spre dreapta, dar trecerea de la nodul curent la fratele din dreapta se realizează numai după vizitarea tuturor descendenților nodului curent, deci a întregului subarbore al nodului respectiv.
 - Se poate realiza utilizând o stivă S :

În cazul arborelui din figura 7, parcurgerea în lățime cu algoritmul de mai sus va avea ca rezultat afișarea cheilor în ordinea: 8, 9, 5, 0, 7, 6, 3, 1, 2, 11. Parcurgerea în preordine cu algoritmul de mai sus va avea ca rezultat afișarea cheilor în ordinea: 8, 9, 5, 6, 3, 0, 7, 1, 2, 11.

1.3 Parcurgerea arborilor binari

Parcurgerea în lățime a unui arbore binar este ilustrată grafic în figura 8. Algoritmul de parcurgere presupune utilizarea unei cozi, în care se stochează nodurile, pentru care încă nu au fost prelucrați fiii.

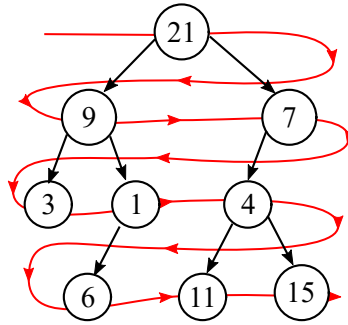


Figura 8: Ordinea de vizitare a nodurilor în cazul parcurgerii în lățime.

Algoritm: Latime

Intrare: Arborele T

Iesire: parcurgerea în lățime

Declaram coada C

$C.PUSH(T.rad)$

cat timp $!C.empty()$ **executa**

$nod_curent \leftarrow C.TOP()$

$C.POP()$

 scrie $nod_curent.info$

daca $nod_curent.st \neq nil$ **atunci**

$C.PUSH(nod_curent.st)$

sfarsit_daca

daca $nod_curent.dr \neq nil$ **atunci**

$C.PUSH(nod_curent.dr)$

sfarsit_daca

sfarsit_cat_timp

Parcurgerea unui arbore binar în adâncime presupune parcurgerea fiecărui nod împreună cu subarborele stâng și subarborele drept. Subarborele stâng se ia în considerare înaintea subarborelui drept.

În funcție de ordinea în care parcurg rădăcina și subarborii, se disting trei tipuri de parcurgere:

- **Preordine (RSD):** rădăcină, subarbore stâng, subarbore drept
- **Inordine (SRD):** subarbore stâng, rădăcină, subarbore drept
- **Postordine (SDR):** subarbore stâng, subarbore drept, rădăcină

Exemplu: Se consideră arborele binar din figura 9. Atunci:

RSD: 20, 15, 9, 0, 17, 30, 24, 22, 36, 45.

SRD: 0, 9, 15, 17, 20, 22, 24, 30, 36, 45.

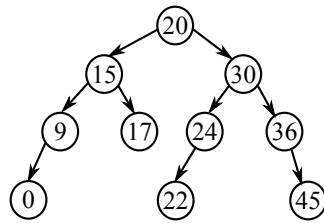


Figura 9: Arbore binar.

SDR: 0, 9, 17, 15, 22, 24, 45, 36, 30, 20.

În practică parcurgerea poate fi făcută în mod secvențial utilizând o stivă, sau recursiv. Algoritmii recursivi sunt mai concisi și mai simpli de implementat dar presupun un consum mai mare de memorie.

Exemplu de algoritm secvențial - parcurgerea în preordine

Se utilizează o stivă S , în care se depun nodurile pentru care mai sunt de parcurs subarborii dreپți:

Algoritm: Preordine

Intrare: Arborele T

Iesire: parcurgerea în preordine

Declaram stiva $S \leftarrow \emptyset$

$nod \leftarrow T.rad$

repetă

cat timp $nod \neq nil$ **execută**

 scrie($nod.info$)

$S.push(nod)$

$nod \leftarrow nod.st$

sfarsit_cat_timp

daca $S \neq \emptyset$ **atunci**

$nod \leftarrow S.top()$

$nod \leftarrow nod.dr$

sfarsit_daca

pana_cand $!S.empty()$;

Algoritmi recursivi

Algoritm: Preordine(nod)

daca $nod \neq nil$ **atunci**

 scrie($nod.info$)

 Preordine($nod.st$)

 Preordine($n=nod.dr$)

sfarsit_daca

Algorithm: Inordine(nod)

```
daca  $nod \neq nil$  atunci
|   Inordine( $nod.st$ )
|   scrie( $nod.info$ )
|   Inordine( $n=nod.dr$ )
sfarsit_daca
```

Algorithm: Postordine(nod)

```
daca  $nod \neq nil$  atunci
|   Postordine( $nod.st$ )
|   Postordine( $nod.dr$ )
|   scrie( $nod.info$ )
sfarsit_daca
```

Exemple de aplicații ale arborilor: Arborii sunt structuri folosite în numeroși algoritmi din diverse domenii ale informaticii. În cele ce urmează sunt enumerate câteva dintre domeniile de utilizare a acestora.

- **Sortare:** Heap-sort - este un algoritm de sortare în complexitate $\theta(n \log n)$ și este prezentat ca aplicație la capitolul despre heap-uri și cozi de prioritate.
- **Codificare și compresie:** arborele de codificare Huffmann, care asociază caracterelor coduri de lungime diferită în funcție de frecvența cu care sunt utilizate caracterele într-un text / respectiv într-o limbă.
- **Compilatoare:** arbori sintactici pentru analiza codului sursă și construirea codului obiect
- **Procesare de imagine / grafică:** arbori Quad, arbori PR - pentru împărțirea și analizarea spațiului 2D.
- **Clasificare:** arbori de decizie în domeniul inteligenței artificiale.
- **Dicționare:** căutare eficientă cu ajutorul arborilor de căutare, subiect ce va fi discutat în capitolele ce urmează.

2 Arbori binari de căutare

Definiție: un arbore binar de căutare este un arbore binar în care fiecare nod are o valoare numită cheie, iar pentru fiecare nod toate nodurile din subarborele stâng au cheile mai mici decât cheia părintelui și toate nodurile din subarborele drept au cheile mai mari decât cheia părintelui.

În cazul în care relația de ordine nu este strictă, dacă nodurile cu chei egale se inserează pe aceeași parte a arborelui, inserția multor noduri cu chei egale are ca urmare obținerea unui arbore relativ dezechilibrat, având ca urmare o creștere a complexității operațiilor.

În continuare se consideră arbori binari de căutare cu chei distincte. Cazul cheilor egale se va discuta separat la sfârșitul cursului.

În figura 10 a) este prezentat un exemplu de arbore binar de căutare.

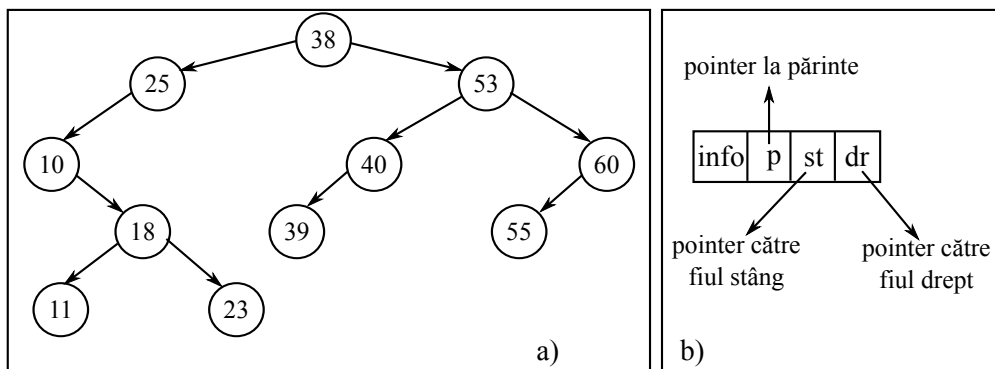


Figura 10: a) Exemplu de arbore binar de căutare; b) Structura unui nod din arbore.

Penru fiecare nod al arborelui se consideră structura din figura 10 b), în care fiecare nod x are câmpurile: $x.info$ = cheia nodului, $x.st$ și $x.dr$ = fiul stâng și respectiv fiul drept, $x.p$ = părintele nodului x .

2.1 Operații într-un arbore binar de căutare

Operațiile de bază într-un arbore binar de căutare sunt:

- Căutarea binară a unei chei.
- Determinarea nodului cu cheia minimă/maximă din arbore.
- Căutarea binară a succesorului / predecesorului unui nod
- Inserție/ștergere a unui nod cu o anumită cheie
- Sortarea cheilor arborelui, prin parcurgerea acestuia în inordine .

Observații:

1. Complexitatea operațiilor într-un arbore binar de căutare este proporțională cu înălțimea arborelui. De fapt, dacă arborele conține n noduri atunci $O(\log_2 n) \leq T(n) \leq O(n)$, $T(n)$ = complexitatea algoritmului utilizat.
2. În cazul unui arbore binar de căutare oarecare nu poate fi garantată complexitatea căutării binare, adică $O(\log_2 n)$.

Există arbori binari de căutare care se auto-balansează, de exemplu arborii AVL și arborii roșu-negru. Pentru aceștia se demonstrează faptul că au complexitatea operațiilor de ordinul $O(\log_2 n)$.

2.2 Căutarea binară

Problemă: Considerând un arbore binar de căutare T cu rădăcina $T.rad$, să se determine nodul cu o cheie dată k .

Soluție: La fiecare moment dat compar cheia nodului curent x , $x.info$, cu k . Dacă $x.info = k$ atunci se returnează nodul x . Dacă $x.info < k$ atunci se continuă căutarea în subarborele drept al lui x , altfel se continuă căutarea în subarborele stâng al lui x .

Algorithm: Căutare binară

Intrare: Arborele binar de căutare T și elementul k care se caută

Iesire: nodul x cu cheia k sau Nil

$x \leftarrow T.rad$

cat_timp $x \leq Nil$ și $x.info \neq k$ **executa**

daca $k < x.info$ **atunci**

$x \leftarrow x.st$

sfarsit_daca

altfel

$x \leftarrow x.dr$

sfarsit_daca

sfarsit_cat_timp

return x

2.3 Minimul dintr-un arbore de căutare

Nodul cu informația minimă din subarborele de rădăcină x a unui arbore binar de căutare poate fi găsit pornind de la nodul x și coborând în descendenții stângi până la cea mai din stânga frunză. Funcția AB.MIN returnează nodul cu informația minimă.

Algorithm: AB.MIN

Intrare: Arborele binar de căutare T și nodul x

Iesire: nodul cu cheia minimă din subarborele de rădăcină x

$y \leftarrow x$

cat_timp $y.st \neq Nil$ **executa**

$y \leftarrow y.st$

sfarsit_cat_timp

return y

Observație: maximul se determină în mod similar și anume parcurgând descendenții dreپți până la cea mai din dreapta frunză.

2.4 Succesorul binar

Succesorul unui nod x într-un arbore binar de căutare este acel nod y din arbore, a cărui cheie are valoarea imediat următoare cheii lui x în șirul sortat al valorilor din arbore.

- Poate fi determinat prin comparații

- Dacă există, este:
 - Cel mai mic element din $x.dr$, dacă $x.dr \neq Nil$
 - Un nod părinte y pentru care x se află în subarborele stâng al lui y , dacă x nu are descendent drept.
- Dacă x este nodul cu cea mai mare cheie, atunci x nu are succesori.

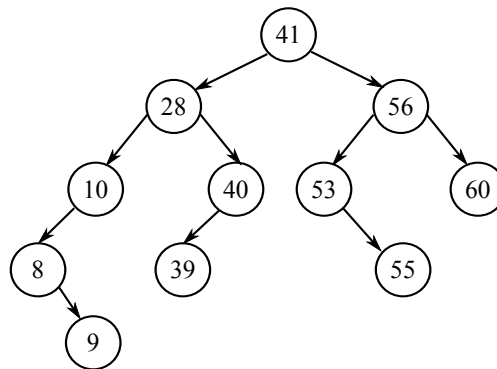


Figura 11: Arbore binar de căutare.

Exemplu: În arborele din figura 11 obținem:

$AB_SUCCESOR(41) = 53$
 $AB_SUCCESOR(39) = 40$
 $AB_SUCCESOR(9) = 10$
 $AB_SUCCESOR(60)$ - nu există

Algoritm: Succesor

Intrare: Arborele binar de căutare T și nodul x

Iesire: nodul y , sucesor binar al lui x

daca $x.dr \neq Nil$ **atunci**

$y = AB_MIN(x.dr)$

sfarsit_daca

altfel

$y \leftarrow x.p$

cat timp $y \neq Nil$ și $x = y.dr$ **executa**

$x \leftarrow y$

$y \leftarrow y.p$

sfarsit_cat_timp

sfarsit_daca

return y

2.5 Inserarea unui nod

Se consideră arborele binar de căutare T cu rădăcina $T.rad$ și nodul z , care are câmpurile

$$z.info = k, z.st = Nil, z.dr = Nil.$$

Se dorește inserarea acestui nod în arborele binar T .

Ideea principală este următoare: pornind de la rădăcină se coboară în arbore, până la un nod, care are cel mult un fiu și care poate fi părintele nodului z . Pentru a respecta proprietatea de arbore binar de căutare, dacă informația nodului curent x este mai mare decât $z.info$, atunci z se va insera în subarborele stâng al lui x , altfel se va insera în subarborele drept.

În figura 12 este ilustrat algoritmul de inserție a unui nod cu cheia 38 într-un arbore binar de căutare.

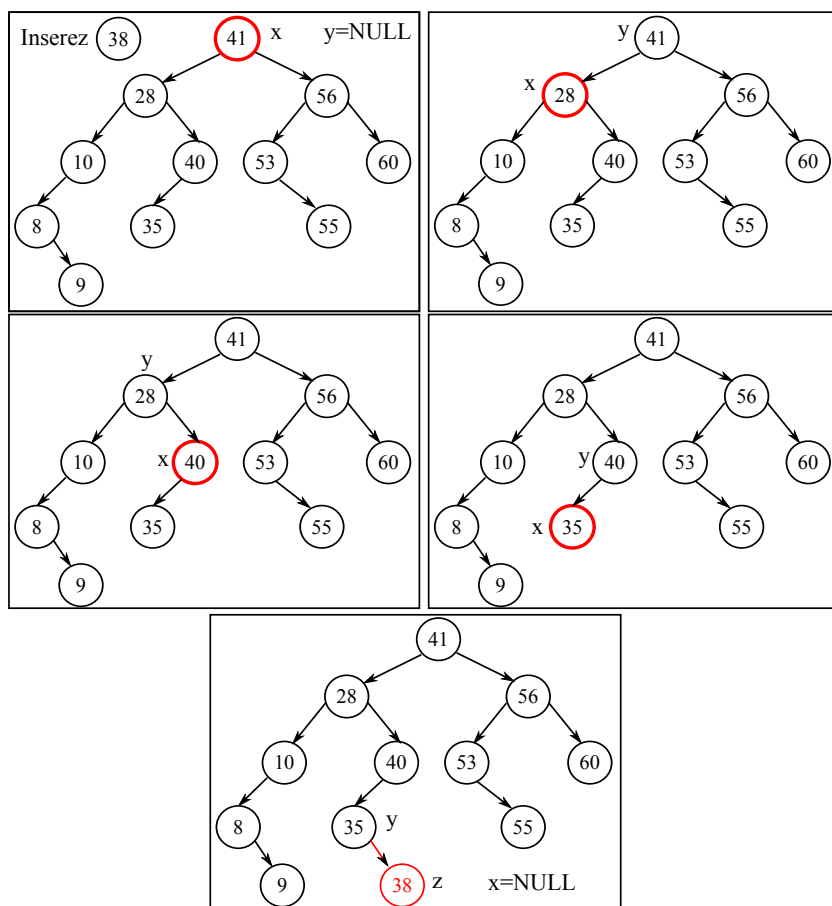


Figura 12: Inserarea nodului cu cheia 28 într-un arbore binar. Nodul curent cu care se compară nodul ce se inserează este marcat cu roșu.

Complexitatea: tuturor operațiilor descrise mai sus, începând de la căutarea binară, au complexitatea $O(h)$, unde h = înălțimea arborelui.

3 Arbori Roșu Negru

Definiție: Un arbore roșu-negru (ARN) este un arbore binar de căutare în care fiecărui nod i se asociază o culoare - roșu sau negru - și care are următoarele proprietăți:

1. Fiecare nod este roșu sau negru - are deci un câmp suplimentar *color*
2. Rădăcina este neagră
3. Fiecare frunză este neagră și NIL
4. Dacă un nod este roșu, ambii fii sunt negri $\Rightarrow$ părintele unui nod roșu este negru.
5. Pentru fiecare nod x , oricare drum de la nod la o frunză NIL se întâlnește același număr de noduri negre (inclusiv frunza NIL și exclusiv nodul de la care se pornește). Acest număr se numește înălțimea neagră a subarborelui de rădăcină x . Notăm înălțimea neagră cu bh - *black height*.

Un exemplu de arbore roșu-negru este prezentat în figura 13.

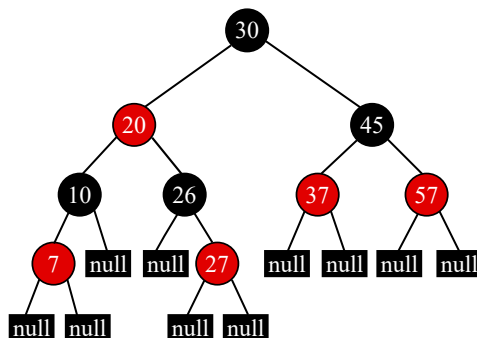


Figura 13: Exemplu de arbore roșu - negru.

Observații:

- Într-un ARN niciun drum de la rădăcină la o frunză nu poate fi mai lung decât dublul unui alt drum la altă frunză. Acest lucru asigură o balansare relativă a arborelui .
- Înălțimea maximă a unui arbore ARN este $2 \log_2(n + 1)$.
Se demonstrează prin inducție că orice subarbore de rădăcină x conține cel puțin $2^{bh(x)} - 1$ noduri interne. Notând cu h înălțimea arborelui și cu r rădăcina, din proprietatea 4 se obține $bh(r) \geq h/2$. Dar $n \geq 2^{bh(r)} - 1 \geq 2^{h/2} - 1$ de unde rezultă $h \leq 2 \log_2(n + 1)$
- Definirea unui nod NIL pentru fiecare frunză presupune un consum inutil de memorie. Din acest motiv se poate considera în locul acestor frunze un singur nod santinelă T.nil către care să indice acele noduri interne care au ca descendenți frunze NIL. Un exemplu de ARN cu santinelă este prezentat în fig. 14.

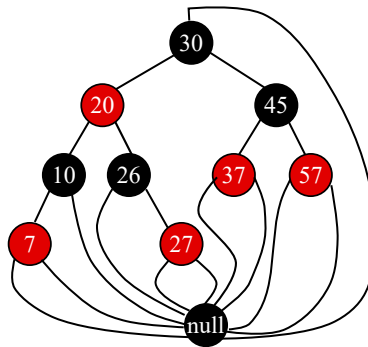


Figura 14: Exemplu de arbore roșu - negru cu santinelă.

- Pentru simplitate în continuare vom ignora în desene nodurile NIL.
- Datorită faptului că operațiile de căutare, maxim, minim, succesor, predecesor depind de înălțimea h a arborelui, înseamnă că aceste operații au complexitatea $O(\log_2 n)$.
- Operațiile de inserție și ștergere sunt ceva mai complicate decât în cazul arborilor binari de căutare simpli, deoarece după inserție/ștergere trebuie eventual refăcută structura de arbore roșu-negru. Complexitatea acestor operații este tot logaritmică.

Prin operații de inserție/ștergere se poate strica anumite proprietăți RN. Pentru refacerea acestor proprietăți de arbore ARN, sunt necesare operații de recolorare și de **rotație**.

Rotația

Este o operație locală care schimbă structura de pointeri într-un arbore binar, dar păstrează proprietățile acestuia.

Tipuri de rotație:

- Rd = rotație spre dreapta în jurul nodului x
- Rs = rotație spre stânga în jurul nodului y

Operația de rotație este ilustrată în figura 15. În figura 16 este ilustrat grafic modul în care se realizează rotația. Iar în figura 17 este prezentată o rotație într-un arbore AVL.

Observații:

- pentru a putea efectua o rotație spre dreapta în jurul nodului x , este necesar ca nodul x să aibă un descendent stâng diferit de NIL.
- pentru a putea efectua o rotație spre stânga în jurul nodului y , este necesar ca nodul y să aibă un descendent drept diferit de NIL.

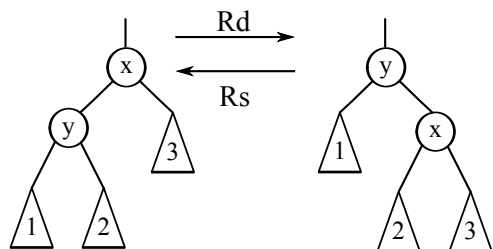


Figura 15: Rotații într-un arbore binar de căutare.

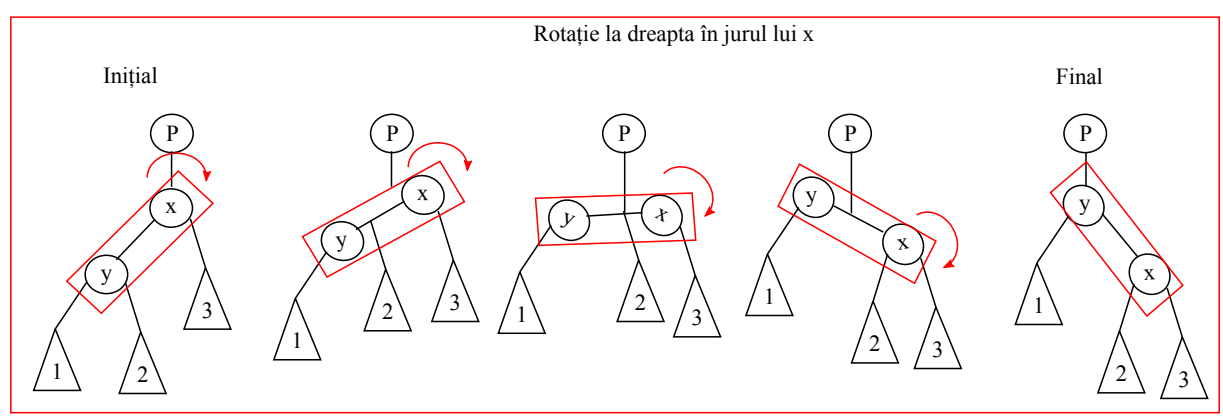


Figura 16: Rotație la dreapta în jurul nodului x într-un arbore binar de căutare.

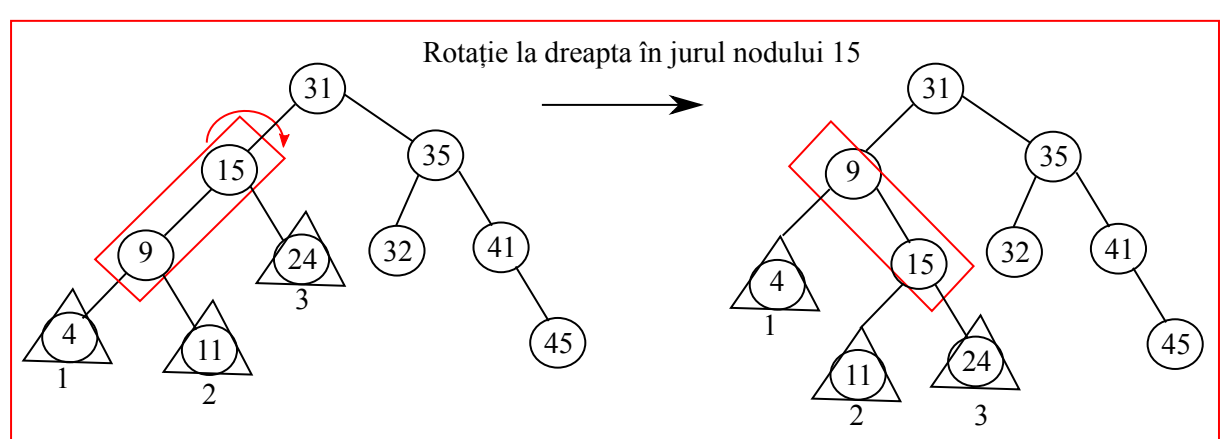


Figura 17: Rotație la dreapta în jurul nodului x într-un arbore binar de căutare.